



РЕПУБЛИКА СЕВЕРНА МАКЕДОНИЈА  
УНИВЕРЗИТЕТ „СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ“ ВО СКОПЈЕ  
ШКОЛА ЗА ДОКТОРСКИ СТУДИИ

Република Северна Македонија  
УНИВЕРЗИТЕТ „СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ“  
ГРАДЕЖЕН ФАКУЛТЕТ СКОПЈЕ 019Б-ДДТ

Број \_\_\_\_\_  
Датум \_\_\_\_\_ 20\_\_\_\_ година  
Скопје

Примено:	04-11-2025		
Орг. Един.	Број:	Прилог:	Вредност:
08/	137-6		

До  
Советот на студиската програма по ГЕОДЕЗИЈА

ДОСТАВУВАЊЕ НА ДОКТОРСКИОТ ТРУД

Име и презиме	Филип Петровски
Број на индекс	58
Студиска програма	Геодезија
Година на упис на докторски студии	2021/2022 г.
Наслов на темата (на македонски и на англиски јазик)	Примена на GNSS-нивелман за определување на локален геод Application of GNSS-levelling for local geoid determination

За да поднесе докторски труд, студентот потребно е да ги исполнува следниве услови:

- стекнати 154 ЕКТС - кредити;
- доставен труд во електронска форма и 7 (седум) еднообразни примероци во печатена форма;
- 2 (два) труда објавени во референтни научни публикации;
- доказ за докторските студии од областа на уметностите.

Јас, проф. д-р Златко Богдановски, како ментор, потврдувам дека студентот ги исполнува условите за да поднесе готов докторски труд и предлагам трудот да се стави во понатамошна постапка и да се формира Комисија за одбрана.

Студент

Ментор



**УНИВЕРЗИТЕТ „СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ“**  
**ГРАДЕЖЕН ФАКУЛТЕТ – СКОПЈЕ**



**ФИЛИП МИРОСЛАВ ПЕТРОВСКИ**

**ПРИМЕНА НА ГНСС-НИВЕЛМАН ЗА  
ОПРЕДЕЛУВАЊЕ НА ЛОКАЛЕН ГЕОИД**

**- Докторски труд -**

**Скопје, 2025**



**УНИВЕРЗИТЕТ „СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ“**  
**ГРАДЕЖЕН ФАКУЛТЕТ – СКОПЈЕ**  
**СТУДИСКА ПРОГРАМА ГЕОДЕЗИЈА**



**ФИЛИП МИРОСЛАВ ПЕТРОВСКИ**

**ПРИМЕНА НА ГНСС-НИВЕЛМАН ЗА  
ОПРЕДЕЛУВАЊЕ НА ЛОКАЛЕН ГЕОИД**

**- Докторски труд -**

**Скопје, 2025**

Докторанд:  
ФИЛИП МИРОСЛАВ ПЕТРОВСКИ

Тема:  
ПРИМЕНА НА ГНСС-НИВЕЛМАН ЗА ОПРЕДЕЛУВАЊЕ НА ЛОКАЛЕН ГЕОИД

Ментор:

Комисија за одбрана:

Научна област:  
Геодезија  
Датум на одбрана:  
.....2026 г.

## БЛАГОДАРНОСТ

Најпрво би сакал да му се заблагодарам на мојот ментор проф. д-р Златко Богдановски за водењето на целиот процес од моето студирање на третиот циклус студии по геодезија кој ми даде можност да работам на една доста важна тема од делот на физичката геодезија.

Постојаните разговори околу моето истражување, резултатите кои се добиваа, сугестиите за понатамошни подобрувања на анализите беа секојдневие во текот на студирањето.

Голема благодарност упатувам и до колегите од Катедрите за виша геодезија и геодезија, на безусловната поддршка, со совети за тоа како овој труд да стане подобро дело чиј бенефит, се надевам, ќе го почувствуваат сите геодетски професионалци.

Особена благодарност искажувам и до Агенцијата за катастар на недвижности на Р. Македонија без чија соработка не би било возможно дефинирање на моделите кои се продукт на овој докторски труд.

Би сакал да се заблагодарам и на Техничкиот Универзитет во Конија, Р. Туркије, каде престојував во рамки на моето студирање. Тука би го издвоил проф. д-р Рамазан Алпај Абак, кој секојдневно ме водеше низ нови осознавања и испитувања поврзани со мојот труд.

Сето погорекажано не би било комплетно, доколку не се споменат оние без чија поддршка не би бил таму каде што сум, а тоа се мојата мајка Благородна, мојот татко Мирослав и мојот брат Александар.

Последно, но најважно, неизмерната поддршка добиена од мојата сопруга Олга и столбот на нашето мало семејство олицетворен во нашето чедо Дамјан го направија мојот процес на истражување и студирање целосен.

## АПСТРАКТ

**Име и презиме на кандидат: Филип Петровски**

**Наслов на докторски труд: Примена на ГНСС-нивелман за определување на локален геоид**

Една од најважните цели во геодезијата е дефинирање на геоиден модел за одредено подрачје (локален или глобален). Повеќе теоретски, методолошки, нумерички и податочни проблеми е потребно да бидат решени со цел да се постигне посакуваниот резултат. Главниот мотив за овој докторски труд и неговото насочување кон оваа проблематика е давање одреден допринос во решавање на одредени проблеми во областа на регионалното гравитациско поле и моделирањето на локален геоид.

Методите кои ќе се применат за добивање на геоидните модели се *KTH* и *CSH*. Се работи за две методи кои се најупотребувани во геодетската литература и пошироко при дефинирање на глобалните (национални) модели на геоид. *KTH* е метод на Кралскиот институт за технологија во Стокхолм, Шведска. Тоа е стохастички модифицирана метода со употреба на принципот на најмали квадрати при користење на Стоксовата формула за дефинирање на геоидни ундулации. *CSH* (*classic Stokes-Helmert*) претставува втората метода која се дефинира со детерминистичка модификација на Стоксовиот интеграл и која се базира на пристапот *RCR* (*Remove-Compute-Restore*). За потребите на пресметките најважни се податоците кои се анализираат (глобални геопотенцијални модели, дигитални теренски модели, аномалии на Земјина тежа, *ГНСС*-нивелмански мерења, теренски корекции).

Глобалните геопотенцијални модели (*ГТМ*) и теренските модели (*ДЕМ*) се јавно достапни. Гравиметриските мерења и *ГНСС* мерењата се добиени од страна на Агенцијата за катастар на недвижности (АКН) во чија надлежност се направени кампањите за воспоставување на нова гравиметриска мрежа во Р. Македонија во периодот од 2010-2014 година. Исто така, се искористени и мерењата од СФРЈ на територија на Р. Македонија кои се изведени во 60те и 70те години од минатиот век.

Испитувањата се направени со користење на осум *ГТМ*, при што се користени модели добиени со *GOCE* и *GRACE* мисиите, како и комбинирани *GOCE+GRACE* модели. Користени се строго само сателитски модели за да нема никакво влијание од било какви терестрички гравиметриски мерења. Во поглед на *ДЕМ*, користени се четири модели (*SRTM*, *ASTER*, *TANDEM-X* и *MERIT*). Сите модели се карактеризираат со високи хоризонтални и вертикални точности кои резултираат со слични дефинитивни модели на геоид. Теренските корекции се добиваат преку користење на *ДЕМ* во различни резолуции, а можат да се генерираат на повеќе начини (користење на квадрати или цилиндри) или преку експортирање од мисијата *SRTM2Gravity*. Сите резултираат со мали разлики меѓу нив без оглед кои и да се користат.

Од страна на АКН се искористени 61 точки на кои е направен гравиметриски премер кои се обработени заедно со уште 104 точки на кои се извршени гравиметриски мерења во времето на СФРЈ, со што вкупната база на податоци е 165 точка со кои можеме да ги пресметаме погребните аномалии на Земјина тежа. За валидација на геоидните модели се искористени 46 *ГНСС*-нивелмански точки.

Дефинитивните модели добиени со *KTH* и *CSH* методите се споредени преку гравиметриските геоидни ундулации со геометриските геоидни ундулации со дефинирани корекциски површини (4 параметарски), односно со одредено израмнување се добиваат конечните точности кои изнесуваат 5.53 cm (*KTH*) и 5.55 cm (*CSH*) во поглед на стандардната девијација.

**Клучни зборови: геоид, гравиметриски мерења, ГНСС, нивелман, ГТМ, ДЕМ, КТН, СШ**

## ABSTRACT

**Name and surname of the candidate: Filip Petrovski**

**Topic of doctoral dissertation: Application of GNSS-levelling for determination of local geoid model**

One of the fundamental objectives in geodesy is the determination of a geoid model for a specific area, whether local or global. Achieving the desired level of accuracy requires addressing a range of theoretical, methodological, numerical, and data-related challenges. The main motivation of this doctoral research and its focus on this subject is to contribute to the resolution of specific issues related to the regional gravity field and the modeling of a local geoid.

The methods applied for the determination of the geoid models are the *KTH* and *CSH* approaches. These two methods are among the most widely used in geodetic literature and practice for defining global or national geoid models. The *KTH* method, developed at the Royal Institute of Technology in Stockholm, Sweden, represents a stochastically modified approach that applies the least squares principle in conjunction with Stokes's formula for determining geoid undulations. The *CSH* (Classic Stokes-Helmert) method, on the other hand, is based on a deterministic modification of Stokes's integral and follows the RCR (Remove-Compute-Restore) approach. For the purposes of the computations, the most essential components are the analyzed data, including global geopotential models, digital elevation models, gravity anomalies, GNSS-levelling measurements, and terrain corrections.

The global geopotential models (GGMs) and digital elevation models (DEMs) used in this research are publicly available. The gravimetric and GNSS measurements were provided by the Agency for Real Estate Cadastre (AREC), which conducted campaigns to establish a new gravimetric network in the Republic of Macedonia during the period 2010–2014. In addition, gravimetric data obtained during the 1960s and 1970s from the former SFRY measurements on the territory of R. Macedonia were also utilized.

The analyses were conducted using eight GGMs, derived from the *GOCE* and *GRACE* missions, as well as combined *GOCE+GRACE* models. Satellite-only models were used to ensure that the results were not influenced by any terrestrial gravimetric measurements. Regarding the DEMs, four datasets were employed (*SRTM*, *ASTER*, *TANDEM-X*, and *MERIT*). All models are characterized by high horizontal and vertical accuracy, resulting in comparable definitive geoid models. Terrain corrections were derived using DEMs of various resolutions and can be generated through several approaches, such as the use of rectangular prisms or cylinders, or by exporting data from the *SRTM2Gravity* mission. All methods yielded minimal differences between the results, regardless of the approach applied.

A total of 61 gravimetric points obtained from the AREC campaigns were used, processed together with an additional 104 points from gravimetric measurements conducted during the SFRY period. This resulted in a combined dataset of 165 points, which served as the basis for computing the required gravity anomalies. For the validation of the geoid models, 46 GNSS-levelling points were employed.

The final models obtained using the *KTH* and *CSH* methods were compared by analyzing the gravimetric geoid undulations against the geometric geoid undulations, using defined four-parameter correction surfaces. After adjustment, the resulting accuracies were 5.53 cm for the *KTH* method and 5.55 cm for the *CSH* method in terms of standard deviation.

**Keywords: geoid, gravimetric measurements, GNSS, levelling, GGM, DEM, KTH, CSH**

## ЛИСТА НА СИМБОЛИ

$k$	Њутнова гравитациска константа
$V$	Гравитациски потенцијал
$U$	Нормален потенцијал
$W$	Потенцијал на Земјина тежа
$T$	Пореметувачки потенцијал
$g$	Земјино забрзување
$\gamma$	Нормално Земјино забрзување
$\varphi$	Геодетска ширина
$\lambda$	Геодетска должина
$\delta_{FA}$	Редукција во слободен воздух
$\delta_B$	Бугеова редукција
$\delta_{TC}$	Теренска редукција
$N$	Геоидна ундулација
$h$	Елипсоидна висина
$H$	Ортометриска висина
$\Delta g_{FA}$	Аномалии во слободен воздух
$\Delta g_{SB}$	Непотполни Бугеови аномалии
$\Delta g_{CB}$	Потполни Бугеови аномалии
$C_{nm}, S_{nm}$	Хармониски коефициенти
$n$	Степен на експанзија на модел
$m$	Ред на експанзија на модел
$N_{GGM}$	Геоидна ундулација од ГГМ
$\Delta g_{GGM}$	Аномалии од ГГМ
$R$	Радиус на Земјата
$\rho_c$	Густина на Земјина кора
$\rho_a$	Густина на атмосфера
$\tilde{N}$	Приближни геоидни ундулации
$\delta N_{comb}^{top}$	Комбинирана топографска корекција
$\delta N_{DWC}$	Корекција поради аналитичко продолжување на аномалиите на површината од геоидот

$\delta N_{atm}$	Атмосферска корекција
$\delta N_{ell}$	Елипсоидна корекција
$s_n, b_n$	Модификациски параметри
$N_{\Delta g_{red}}$	Резидуали на геоидните ундулации
$N_{SITE}$	Корекции поради примарен индиректен топографски ефект на геоидните ундулации
$\Delta g_{DTE}$	Директни влијанија на топографските маси
$\Delta g_{DAE}$	Атмосферска корекција на аномалиите
$\Delta g_{ELL}$	Елипсоидна корекција на аномалиите
$\Delta g_{SITE}$	Секундарен индиректен топографски ефект врз аномалиите
$\psi_0$	Радиус на интеграциска зона
$C$	Варијанса на терестрички аномалии
$\nu$	Тип на стохастичка модификација на Стоксовиот интеграл
$L$	Максимален степен на модификација на Стоксова функција

## ЛИСТА НА СКРАТЕНИЦИ

<i>LSMSA</i>	Least Square Modification of Stokes formula with Additive Corrections
<i>KTH</i>	Royal Institute of Technology
<i>CSH</i>	Classic Stokes-Helmert
<i>DTE</i>	Директен топографски ефект
<i>RITE</i>	Примарен индиректен топографски ефект
<i>SITE</i>	Секундарен индиректен топографски ефект
<i>STD</i>	Стандардна девијација или средна квадратна грешка
<i>IGGEM</i>	Интернационален центар за Земјени геопотенцијални модели
<i>GTM</i>	Глобални геопотенцијални модели
<i>ДЕМ</i>	Дигитални елевациски модели
<i>ГНСС</i>	Глобални навигациски сателитски системи
<i>АКН</i>	Агенција за катастар на недвижности на Р. Македонија
<i>CHAMP</i>	CHALLENGING Minisatellite Payload
<i>GRACE</i>	Gravity Recovery and Climate Experiment
<i>GOCE</i>	Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer
<i>DTM</i>	Digital Terrain Model
<i>DSM</i>	Digital Surface Model
<i>SRTM</i>	Shuttle Radar Topography Mission
<i>ASTER</i>	Advanced Space-borne Thermal Emission and Reflection Radiometer
<i>MERIT</i>	Multi-Error-Removed Improved Terrain
<i>TANDEM-X</i>	TerraSAR-X add-on for Digital Elevation Measurements
<i>IGSN71</i>	International Gravity Standardization Network 1971
<i>HBT3</i>	Нивелман од висока точност 3
<i>RCR</i>	Remove – compute – restore
<i>LSMSSOFT</i>	Софтвер за <i>LSMSA</i> метода
<i>CSHSOFT</i>	Софтвер за <i>CSH</i> метода

## ЛИСТА НА СЛИКИ

Слика 1.1 Сооднос на Земјина површина со геоид и елипсоид.....	1
Слика 2.1 Компонента на гравитациска сила ( <i>Hofmann-Wellenhof &amp; Moritz, 2005</i> ) .....	9
Слика 3.1 Редукција на Земјина тежа ( <i>Hofmann-Wellenhof &amp; Moritz, 2005</i> ).....	17
Слика 3.2 Бугеова плоча.....	19
Слика 3.3 Теренска редукција .....	20
Слика 3.4 Индиректен ефект, геоид и когеоид .....	21
Слика 4.1 Определување на висинска разлика со користење на ГНСС-нивелман ( <i>Johannessen, 1999</i> ).....	25
Слика 4.2 Дефинирање на хибриден геоид.....	27
Слика 4.3 Постапка за оцена на точност на гравиметриски геоид.....	29
Слика 4.4 Приказ на GRACE принцип на мерење.....	33
Слика 4.5 GRACE сателити пред лансирање .....	33
Слика 4.6 Внатрешни компоненти на GRACE сателит ( <i>NASA, 2003</i> ).....	34
Слика 4.7 Приказ на GOCE мерење .....	35
Слика 4.8 EGG градиометар (лево) и SSTI инструмент (десно) .....	36
Слика 4.9 Листа со хармониски коефициенти и нивни грешки, модел GOSG02S .....	40
Слика 4.10 Пресметувачки сервис на GFZ ( <i>GFZ, 2025a</i> ).....	41
Слика 4.11 Геоидни ундулации за територија на Република Македонија .....	41
Слика 4.12 Аномалии во слободен воздух за територија на Република Македонија .....	42
Слика 4.13 Непотполни Бугеови аномалии за територија на Р. Македонија .....	42
Слика 4.14 Приказ на разликите помеѓу DSM и DTM .....	44
Слика 4.15 SRTM 3Д приказ за Република Македонија .....	46
Слика 4.16 Дигитални теренски модели за Република Македонија.....	47
Слика 4.17 Гравиметриска мрежа од I ред на територијата на СФРЈ ( <i>AREC, 2022</i> )....	48
Слика 4.18 Распоред на гравиметриски точки во Република Македонија .....	49
Слика 4.19 Основна гравиметриска мрежа ( <i>AREC, 2022</i> ).....	50
Слика 4.20 НВТЗ мрежа ( <i>AREC, 2022</i> ) .....	51
Слика 4.21 Интеграција во рамки на простор дефиниран со центар во точка P.....	57
Слика 4.22 Дијаграм на пресметување со KTH метода .....	60
Слика 4.23 Дијаграм на пресметување со CSH методот .....	66
Слика 5.1 Предметно подрачје за локален геоид .....	68
Слика 5.2 Предметно и податочно подрачје .....	69
Слика 5.3 Распоред на $\Delta g_{FA}$ (лево) и интерполирана гريد мрежа (десно) .....	74
Слика 5.4 Распоред на ГНСС-нивелмански точки .....	75
Слика 5.5 Распоред на $\Delta g_{FA}$ во предметно подрачје.....	76
Слика 5.6 Распоред на гравиметриски податоци во податочно и предметното подрачје .....	77
Слика 5.7 Интерполирани непотполни Бугеови аномалии со Min. Curvature.....	80
Слика 5.8 Разлика на непотполни Бугеови аномалии со Min. Curvature и Kriging,..	81
Слика 5.9 Разлика на непотполни Бугеови аномалии со Min. Curvature и Moving Average,.....	81
Слика 5.10 Стандардна девијација на коефициенти за ГТМ модели .....	85
Слика 5.11 Стандардна девијација на грешки за ГТМ модели.....	85
Слика 5.12 Корелација на коефициенти, референтен модел GOSG02S.....	86
Слика 5.13 Процентуална корелација на коефициенти, референтен модел GOSG02S .....	87

Слика 5.14 Сооднос на <i>STD</i> , референтен модел <i>GOSG02S</i> .....	88
Слика 5.15 Разликите $\delta N$ како функција од ортометриски висини.....	90
Слика 5.16 Разликите $\delta N$ како функција од геоидни ундулации.....	90
Слика 5.17 Разликите $\delta N$ како функција од геодетска ширина .....	91
Слика 5.18 Разликите $\delta N$ како функција од геодетска должина .....	91
Слика 5.19 Разликите $\delta N$ како функција од аномалиите во слободен воздух .....	92
Слика 5.20 Разликите $\delta N$ како функција од непотполните Бугеови аномалии .....	92
Слика 5.21 Интерполирани разлики $\delta N$ , модел <i>GOSG02S</i> .....	93
Слика 5.22 $\delta\Delta g$ како функција од ортометриски висини .....	94
Слика 5.23 $\delta\Delta g$ како функција од геодетска ширина.....	95
Слика 5.24 $\delta\Delta g$ како функција од геодетска должина.....	95
Слика 5.25 $\delta\Delta g$ како функција од аномалии во слободен воздух.....	96
Слика 5.26 $\delta\Delta g$ како функција од непотполни Бугеови аномалии.....	96
Слика 5.27 Интерполирани разлики на аномалии $\delta\Delta g$ , модел <i>GOSG02S</i> .....	97
Слика 5.28 Средина на разлики со различен степен на експанзија.....	97
Слика 5.29 Стандардна девијација со различен степен на експанзија.....	98
Слика 5.30 Интерполирани разлики на моделите <i>SRTM-ASTER</i> .....	100
Слика 5.31 Интерполирани разлики на моделите <i>MERIT-TANDEM</i> .....	101
Слика 5.32 Интерполирани разлики на терестрички аномалии со <i>MERIT</i> .....	102
Слика 5.33 Интерполирани разлики на $\delta_{TC}$ за предметно подрачје,.....	104
Слика 5.34 $\delta_{TC}$ за податочно подрачје, модел <i>SRTM</i> , мерни единици [mGal] .....	105
Слика 6.1 Влијание на $n_{max}$ врз геоидот, без израмнување.....	108
Слика 6.2 Влијание на $n_{max}$ врз геоидот, со израмнување.....	109
Слика 6.3 Влијание на радиусот на интеграција врз геоидот, без израмнување ....	109
Слика 6.4 Влијание на радиусот на интеграција врз геоидот, со израмнување .....	110
Слика 6.5 Влијание на варијанса на терестрички аномалии врз геоидот, без израмнување.....	111
Слика 6.6 Влијание на варијанса на терестрички аномалии врз геоидот, со израмнување.....	111
Слика 6.7 Влијание на стохастичка модификација врз геоидот, без израмнување .	112
Слика 6.8 Влијание на стохастичка модификација врз геоидот, со израмнување ..	113
Слика 6.9 Влијание на глобалните геопотенцијални модели врз геоидот, без израмнување.....	114
Слика 6.10 Влијание на глобалните геопотенцијални модели врз геоидот, со израмнување.....	114
Слика 6.11 Влијание на <i>ДЕМ</i> врз геоидот, без израмнување .....	115
Слика 6.12 Влијание на <i>ДЕМ</i> врз геоидот, со израмнување.....	115
Слика 6.13 Влијание на <i>ДЕМ</i> за аномалии во слободен воздух врз геоидот, без израмнување.....	116
Слика 6.14 Влијание на <i>ДЕМ</i> за аномалии во слободен воздух врз геоидот, со израмнување.....	117
Слика 6.15 Приближни геоидни ундулации <i>N</i> .....	118
Слика 6.16 Топографска корекција $\delta N_{top}$ .....	119
Слика 6.17 <i>DWC</i> корекција $\delta N_{DWC}$ .....	119
Слика 6.18 Атмосферска корекција $\delta N_{atm}$ .....	120
Слика 6.19 Елипсоидна корекција $\delta N_{ell}$ .....	121
Слика 6.20 Гравиметриски геоид <i>MKKG-2025</i> .....	122
Слика 6.21 Хибриден геоид <i>MKKH-2025</i> .....	122

Слика 7.1 Влијание на максималниот степен на ГГМ, без израмнување .....	125
Слика 7.2 Влијание на максималниот степен на ГГМ, со израмнување.....	126
Слика 7.3 Влијание на интеграцискиот радиус, без израмнување .....	126
Слика 7.4 Влијание на интеграциски радиус, со израмнување.....	127
Слика 7.5 Влијание на максимален степен на Стоксова модификација, без израмнување.....	127
Слика 7.6 Влијание на максимален степен на Стоксова модификација, со израмнување.....	128
Слика 7.7 Влијание на изборот на ГГМ, без израмнување .....	129
Слика 7.8 Влијание на изборот на ГГМ, со израмнување.....	129
Слика 7.9 Влијание на ДЕМ, без израмнување .....	130
Слика 7.10 Влијание на ДЕМ, со израмнување .....	130
Слика 7.11 Влијание на ДЕМ врз аномалии, без израмнување .....	131
Слика 7.12 Влијание на ДЕМ врз аномалии, со израмнување.....	131
Слика 7.13 Влијание на ДЕМ за теренски корекции, без израмнување.....	132
Слика 7.14 Влијание на ДЕМ за теренски корекции, со израмнување .....	132
Слика 7.15 Геоидни ундулации од ГГМ, NGGM.....	134
Слика 7.16 Резидуали на геоидни ундулации, $N\Delta g_{red}$ .....	134
Слика 7.17 Примарно топографско влијание врз ундулации, NPITE .....	135
Слика 7.18 Гравиметриски геоид MKSHG-2025.....	136
Слика 7.19 Хибриден модел, MKSHH-2025 .....	137
Слика 8.1 Споредба на интерполирани гравиметриски разлики .....	139
Слика 8.2 Споредба на интерполирани хибридни модели .....	140
Слика 8.3 Разликите $\delta N$ како функција од ортометриските висини.....	141
Слика 8.4 Разликите $\delta N$ како функција од геоидните ундулации.....	142
Слика 8.5 Разликите $\delta N$ како функција од геодетската ширина.....	142
Слика 8.6 Разликите $\delta N$ како функција од геодетската должина.....	143

## ЛИСТА НА ТАБЕЛИ

Табела 2.1 Константи на елипсоид <i>GRS 80</i> .....	14
Табела 4.1 Параметри за орбита на <i>GRACE</i> сателити .....	34
Табела 4.2 Параметри на <i>GRACE</i> инструмент (ESA, 2025c) .....	35
Табела 4.3 Параметри за орбита на <i>GOCE</i> .....	37
Табела 4.4 Листа на користени <i>ГГМ</i> .....	37
Табела 4.5 Користени дигитални теренски модели со нивните спецификации .....	46
Табела 4.6 Карактеристики на новата гравиметриска мрежа .....	49
Табела 5.1 Граници на податочно подрачје.....	70
Табела 5.2 Влезни параметри на методи за интерполација.....	78
Табела 5.3 Точност на интерполација за $\Delta g_{FA}$ , мерни единици [mGal] .....	79
Табела 5.4 Точност на интерполација за $\Delta g_{SB}$ , мерни единици [mGal] .....	79
Табела 5.5 Влијание на <i>nmax</i> на <i>ГГМ</i> во однос на просторна резолуција .....	83
Табела 5.6 Споредба на <i>ГГМ</i> со <i>ГНСС</i> -нивелман, <i>no-fit</i> , мерни единици [cm].....	89
Табела 5.7 Споредба на <i>ГГМ</i> со <i>ГНСС</i> -нивелман, мерни единици [cm].....	89
Табела 5.8 Споредба на $\Delta g_{FA}$ со <i>ГГМ</i> , <i>no-fit</i> , мерни единици [mGal] .....	93
Табела 5.9 Споредба на <i>ДЕМ</i> со нивелмански точки, <i>no-fit</i> , мерни единици [m] .....	99
Табела 5.10 Споредба на <i>ДЕМ</i> со нивелмански точки, 4 параметри, мерни единици [m] .....	99
Табела 5.11 Разлики на <i>ДЕМ</i> за предметно подрачје, мерни единици [m].....	100
Табела 5.12 Споредба на <i>ДЕМ</i> аномалии со терестрички аномалии, мерни единици [mGal].....	101
Табела 5.13 Статистика за разлики на <i>ДЕМ</i> аномалии за предметно подрачје, мерни единици [mGal].....	102
Табела 5.14 Оцена на точност на теренските корекции и нивните разлики, предметно подрачје, мерни единици [mGal].....	104
Табела 5.15 Оцена на точност на теренските корекции за податочно подрачје, мерни единици [mGal].....	105
Табела 5.16 Оцена на точност на разлики од теренските корекции за податочно подрачје, мерни единици [mGal].....	106
Табела 6.1 Променливи податоци при пресметување на геоид, <i>КТН</i> метод.....	107
Табела 6.2 Оцена на точност на гравиметриски геоид, мерни единици [cm].....	118
Табела 6.3 Статистика за излезни големини при <i>КТН</i> метода.....	121
Табела 6.4 Вредности на гравиметриски и хибриден геоид, <i>КТН</i> метода, мерни единици [m] .....	122
Табела 7.1 Променливи податоци при пресметување на геоид, <i>CSH</i> метод.....	124
Табела 7.2 Оцена на точност на гравиметриски геоид, мерни единици [cm].....	133
Табела 7.3 Статистика за излезни компоненти во <i>CSH</i> метода.....	136
Табела 7.4 Вредности на гравиметриски и хибриден геоид, <i>CSH</i> метода, мерни единици [m] .....	137
Табела 8.1 Споредба на гравиметриски модели на 46 точки, мерни единици [cm] .....	138
Табела 8.2 Статистичка анализа за методите на 46 точки, мерни единици [cm]....	140
Табела 8.3 Софтвер и кориснички сервиси за подготовка на податоци .....	145

## СОДРЖИНА

1. ВОВЕД .....	1
1.1 Образложување на темата .....	1
1.2 Предмет на истражување.....	2
1.3 Цел на истражување .....	4
1.4 Досегашни достигнувања поврзани со предметот на истражување.....	5
1.5 Предглед на поглавја .....	6
2. ОСНОВИ НА ПОЛЕ НА ЗЕМЈИНА ТЕЖА.....	8
2.1 Потенцијал.....	8
2.2 Поле на Земјина тежа.....	11
2.3 Нормално поле на Земјина тежа.....	12
2.4 Пореметувачко поле на Земјина тежа.....	14
3. РЕДУКЦИЈА И АНОМАЛИИ НА ЗЕМЈИНА ТЕЖА .....	17
3.1 Вовед .....	17
3.2 Редукција во слободен воздух.....	18
3.3 Бугеова редукција .....	19
3.4 Теренска редукција .....	19
3.4.1 Директен топографски ефект (DTE) .....	20
3.4.2 Примарен и секундарен индиректен ефект .....	21
3.5 Аномалии на Земјина тежа.....	22
3.5.1 Аномалии во слободен воздух.....	23
3.5.2 Бугеови аномалии.....	23
4. ОПРЕДЕЛУВАЊЕ НА ГЕОИД .....	24
4.1 Вовед .....	24
4.2 Оцена на точност и вклопување на гравиметриски геоид.....	27
4.3 Податоци за определување на геоид.....	29
4.3.1 Глобални геопотенцијални модели.....	30
4.3.2 Дигитални теренски модели .....	43
4.3.3 Терестрички гравиметриски податоци .....	48
4.3.4 Нивелмански податоци.....	50
4.4 Методи за определување на геоид.....	52
4.4.1 <i>KTN</i> метода .....	52
4.4.1.1 Приближни геоидни ундулации .....	54
4.4.1.2 Модификациски параметри.....	56
4.4.1.3 Стоксова интеграција.....	56
4.4.1.4 Топографска корекција .....	58
4.4.1.5 <i>DWC</i> корекција .....	58
4.4.1.6 Атмосферска корекција.....	59
4.4.1.7 Елипсоидна корекција .....	60
4.4.2 <i>CSH</i> метода.....	61

4.4.2.1	Детерминистички модификации на Стоксовиот интеграл .....	62
4.4.2.2	Модификација на Стоксовиот интеграл со Вонг-Гор .....	63
4.4.2.3	Практични формули за <i>CSH</i> метод.....	64
5.	ПОДРАЧЈЕ И ПОДАТОЦИ ЗА ЛОКАЛЕН ГЕОИД.....	68
5.1	Предметно подрачје за определување на локален геоид.....	68
5.2	Методи за интерполација .....	70
5.3	Податоци за <i>ГНСС</i> -нивелман.....	75
5.4	Податоци за аномалии на Земјина тежа .....	76
5.5	Валидација на методи за интерполација со аномалии на Земјина тежа .....	78
5.6	Валидација на глобални геопотенцијални модели .....	82
5.6.1	Спектрална анализа.....	83
5.6.2	Валидација со <i>ГНСС</i> -нивелман.....	89
5.6.3	Валидација со аномалии на Земјина тежа.....	93
5.6.4	Валидација со максимален степен на експанзија .....	97
5.7	Валидација на дигитални теренски модели.....	98
5.7.1	Валидација на <i>ДЕМ</i> со нивелмански точки .....	99
5.7.2	Валидација на <i>ДЕМ</i> со гравиметриски точки .....	101
5.8	Теренски корекции.....	102
6.	<i>КТН</i> МЕТОДА – МОДЕЛИ НА ГЕОИД.....	107
6.1	Влијание на влезните податоци и променливите врз <i>КТН</i> моделите.....	107
6.2	Дефинитивни модели со <i>КТН</i> метода .....	117
7.	<i>CSH</i> метода – модели на геоид .....	124
7.1	Влијание на влезните податоци и променливите врз <i>CSH</i> моделите .....	124
7.2	Дефинитивни модели со <i>CSH</i> метода.....	133
8.	СПОРЕДБЕНА АНАЛИЗА НА МЕТОДИ .....	138
8.1	Споредби на моделите .....	138
8.2	Преглед .....	143
9.	ЗАКЛУЧОК И ПРЕПОРАКИ ЗА ПОНАТАМОШНИ ИСТРАЖУВАЊА .....	146
10.	ЛИТЕРАТУРА.....	149
	ПРИЛОЗИ .....	154

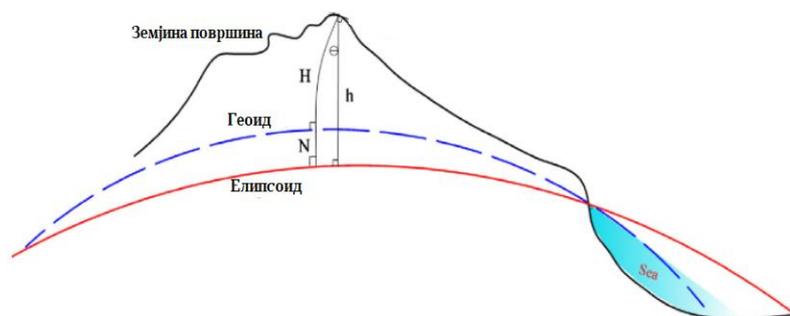
## 1. ВОВЕД

### 1.1 Образложување на темата

Дефинирањето на геоидот претставува една од најзначајните, но воедно и најкомплексните задачи во современата геодезија. Геоидот се дефинира како еквипотенцијална површина на која потенцијалот во секоја точка е идентичен и која во глобална смисла коинцидира со површината на светското море во состојба на мирување. Неговото точно дефинирање претставува предуслов за воспоставување на конзистентни и унифицирани висински системи, кои имаат клучно значење за голем број научни, инженерски и практични апликации – од картографија и инфраструктурно планирање до мониторинг на земјини процеси и управување со природни ресурси.

Во геодезијата, сите мерења се изведуваат на физичката површина на Земјата, која поради својата неправилна и сложена форма е речиси невозможно математички да се дефинира. Оваа сложеност ја наметнува потребата од нејзина апроксимација со геометриски тела чии математички модели можат прецизно да се опишат и аналитички да се обработуваат. Едно од најзначајните такви тела е елипсоидот, кој ја претставува идеализираната форма на Земјата, карактеризирана со сплеснатост на половите и испакнатост на екваторот. Елипсоидот се дефинира преку своите геометриски параметри, голема полуоска и прва сплеснатост и има суштинска улога во сателитската геодезија, особено при изведување на ГНСС мерења, преку кои се добиваат елипсоидни висини, мерени по нормалата на елипсоидот што поминува низ дадена точка на Земјината површина.

Од друга страна, во класичната геодезија, преку геометрискиот нивелман, се определуваат релативни висински разлики со чија помош се добиваат апсолутните надморски висини на геодетските точки. Овие мерења се изведуваат на физичката површина на Земјата и резултираат со добивање ортометриски висини, кои ја претставуваат висината на точката мерена долж вертикалата од површината на геоидот. Геоидот е површина која се дефинира со геоидните висини или геоидни ундулации. Со споредување на двата концепта, елипсоидниот и геоидниот, се наметнува потребата од воспоставување на врска помеѓу елипсоидните и ортометриските висини, односно нивна трансформација во единствен висински систем. Од Слика 1.1 можеме да забележиме дека елипсоидната висина ( $h$ ) претставува збир на ортометриската висина ( $H$ ) и геоидната ундулација ( $N$ ).



Слика 1.1 Сооднос на Земјина површина со геоид и елипсоид

Нивната пресметка претставува еден од најпредизвикувачките процеси во физичката геодезија, бидејќи бара комбинирање и интеграција на повеќе типови податоци и мерења. ГНСС мерењата се геометриски, нивелманските се физички, додека

пак се појавува и потреба од геофизички (гравиметриски) мерења. Гравиметриските мерења овозможуваат определување на вредностите на Земјиното забрзување, но за нивна практична примена е потребна дополнителна обработка, која вклучува редуции и додавање на соодветни поправки со цел пресметка на аномалиите на Земјината тежа. Овие аномалии ги претставуваат разликите помеѓу редуцираното и нормалното Земјино забрзување и се клучен параметар при моделирањето на геоидот.

Во последните децении, со развојот на сателитската технологија и современите модели на гравитациското поле, прецизноста во дефинирањето на геоидот значително се подобрува. Комбинирањето на глобални геопотенцијални модели (ГГМ) кои се производ на сателитски мисии како *GOCE*, *GRACE* и *CHAMP*, заедно со деталните дигитални теренски модели (ДЕМ), овозможува создавање на регионални и локални модели на геоид со сантиметарска точност.

Во рамките на оваа докторска дисертација ќе се изврши интеграција на различни методи за пресметување на геоидните ундулации, со цел да се оцени нивната прецизност, стабилност и применливост при дефинирање на локален геоид за територијата на Република Македонија. Секој од применетите методи е независен во поглед на начинот на обработка и анализата на податоците (сателитски, нивелмански и гравиметриски). Методата која ќе резултира со најмала грешка при дефинирањето на геоидот ќе биде усвоена како најсоодветна, а добиеното решение ќе се предложи како најприменливо во практичната геодетска и инженерска работа, со потенцијал за понатамошна примена во националните висински системи и геопросторни инфраструктури.

## 1.2 Предмет на истражување

Во рамки на докторскиот труд, предмет на истражување претставува западниот регион од нашата држава, односно регионот кој се протега од Гостивар на север, селото Мешеишта на југ, село Пласница на исток и месноста на градот Дебар, односно до селото Долно Косоврасти на запад.

Се работи за подрачје кое се е дефинирано со карактеристични разлики во надморските висини, кои се протегаат од 580 м.н.в. до 850 м.н.в. во источниот предел на опфатот од интерес, додека пак на западната страна од опфатот надморските висини се карактеризираат со издигнувања од 900 м.н.в. до 2150 м.н.в. како највисока точка, на планината Стогово. Одбрано е ова предметно подрачје затоа што се карактеризира со разлики во надморските висини, кои предизвикуваат различно распределување на густината на Земјените маси, односно различни вредности за Земјиното забрзување на повисоките и пониските предели. Тоа е интересен распоред за дефинирање на локален геоид.

Предмет на истражување се потребните податоци за добивање на гравиметриски и хибридни модели на геоид. Во пресметките потребни се податоци кои се однесуваат на различни координатни системи.

Најважни податоци се гравиметриските мерења за Земјиното забрзување со кои се овозможува пресметка на аномалиите на Земјина тежа. Аномалиите ги прикажуваат разликите помеѓу реалното и нормалното поле на Земјина тежа. Тие податоци се добиваат од надлежните институции. Во периодот кога Р. Македонија била дел од поранешна СФРЈ, таа одговорност припаѓала на Военогеографскиот институт во Белград, додека пак во денешно време надлежна е Агенцијата за катастар на недвижности на Р. Македонија (АКН). За потребите на овој труд се искористени 165 точки од релативниот гравиметриски премер. Тие ги дефинираат точкестите варијации во гравитациското поле на Земјата. Со

помош на овие мерења ќе се определат аномалиите на Земјина тежа. Аномалиите кои ќе се користат во оваа теза се: во слободен воздух и непотполни Бугеови. Аномалиите зависат од претходно определените редуции за мерењата на Земјино забрзување. Со помош на редуцираните мерења и нормалното Земјино забрзување се добиваат потребните вредности кои понатаму влегуваат во постапките на пресметување.

Втор тип на податоци кои се користат се глобалните геопотенцијални модели (ГГМ) кои ги прикажуваат долготрановите варијации на Земјиното поле на тежа. Овие модели се архивираат од страна на Интернационалниот центар за глобални Земјини модели – *ICGEM* (Ince *et al.*, 2019) каде се и јавно достапни. Моделите можат да бидат сателитски или комбинирани (сателитски дополнети со алтиметриски и терестрички мерења). Во овој труд се користат осум модели кои се добиени од различни сателитски мисии: *GRACE* (NASA) и *GOCE* (ESA). Користените модели се поделени во три категории: ГГМ добиени само од *GOCE* мисија, модели добиени само од *GRACE* мисија и модели добиени како комбинација на *GOCE+GRACE* мисиите. Центарот располага со повеќе од 200 модели. Архивирањето на моделите започнува во далечната 1966 година преку креирање на моделот WGS1966. Сите модели се дефинирани со максималниот степен и ред на експанзија  $n_{max}$ . Во суштина, моделите добиени само од сателитски мерења се со помали максимални степени  $n_{max} \approx 250 - 300$ , додека пак комбинираниите модели достигнуваат и до степен 5500. ГГМ се дефинираат преку серии на сферни хармоници кои се решенија на Лапласовата равенка, а *ICGEM* ги прикажува како листи од сферни коефициенти подредени по максимален степен и ред за моделот. Поголемите степени за моделите, значат повеќе детали кои ги карактеризираат, но воедно истите се оптоварени и со дополнителни грешки на хармониските коефициенти. Најприменети модели се *EGM2008* (Pavlis *et al.*, 2012) и *EIGEN 6C4* (Foerste, 2014). Користените модели имаат намена за дополнување на предметното подрачје со аномалии на Земјина тежа со што се комплетира податочното подрачје.

Следен тип на податоци се дигиталните елевациони модели (ДЕМ) со кои се претставуваат краткотрановите варијации на Земјино поле на тежа. Тие се модели кои можат да бидат теренски или површински и кои се карактеризираат со различна резолуција. Во овој труд, се користат четири модели (*SRTM*, *ASTER*, *MERIT* и *TANDEM*). Тие се дефинирани со 1" просторна резолуција ( $\approx 30$  m). Овие модели се јавно достапни и се креирани од различни институции. Моделите ги носат информациите за топографијата во рамки на податочното подрачје и затоа нивната точност во голема мера влијае на дефинитивните резултати. Примената ја наоѓаат во постапките на подготовка на аномалиите на Земјина тежа кои директно зависат од ортометриските висини.

За валидација на гравиметриските модели на геоид, потребни се независни ГНСС-нивелмански мерења. Тие податоци претставуваат мерења на елипсоидната и ортометриската висина на иста точка со цел да се добијат геометриските геоидни ундулации. Тие мерења се обезбедени преку АКН (AREC, 2025). Од страна на АКН се доставени обрасците од извршената кампања за нивелман од висока точност (НВТ 3). Новата нивелманска мрежа од висока точност се состои од 1098 репери кои се поврзани со 49 нивелмански влаци и 19 полигони и конекција преку 12 влаци со нивелманските мрежи на соседните земји. Во рамките на оваа мрежа се дефинирани 28 фундаментални репери и 31 јазолна точка. Вкупната должина на нивелманските влаци изнесува 2189 километри, со просечно растојание од 1800 м помеѓу реперите и периметар од 166 километри на затворените полигони (Odalovic, 2009). Во теренските обрасци се запишани покрај ортометриските висини и ГНСС вредностите за елипсоидната ширина, должина и

висина. Во предметното подрачје, валидирањето се прави со помош на 46 ГНСС-нивелмански точки.

Покрај валидација на гравиметриските модели, ГНСС-нивелманските мерења се користат и за добивање на хибридни геодни модели, преку пресметување на разликите помеѓу геометриските и гравиметриските геодни ундулации и нивно додавање на гравиметриските ундулации.

Предметот на истражување во оваа теза опфаќа пет различни датотеки. Тоа значи дека е потребно посебна класификација на податоците, нивна обработка, користење на соодветни методи за добивање на резултатите и нивна валидација.

Имплементацијата на овие податоци оди заедно со користење на соодветни методи за пресметка на геод. Во светската литература поделени се мислењата за тоа кои методи е потребно да се користат за добивање на геодни решенија. Еден од методите е *KTH* методата кој се однесува на метода на најмали квадрати со додатни корекции (*LSMSA*) и методите кои се базираат на принципот *remove-compute-restore (RCR)*.

*KTH* е метода која се базира на модифицирање на Стоксовиот интеграл со принципот на најмали квадрати и додавање на соодветни корекции за добивање на соодветни решенија. Се работи за метода во која не се прави редуција на податоците, туку тие директно влегуваат во пресметките. Првична е пресметката на приближните геодни ундулации на кои им се додаваат четири корекции и се добиваат дефинитивните геоди.

Вторите методи се базираат на принципот *RCR* со кои се врши редуцирање на терестричките аномалии на Земјина тежа. Од нивните вредности се одземаат вредностите за аномалиите од *ГГМ* и *ДЕМ*, со што се отстрануваат долготрановите и краткотрановите влијанија врз решенијата во чекорот *remove*. Редуцираните аномалии се користат во постапката на пресметка на резидуали на геодните ундулации во чекорот *compute*. На крајот во чекорот *restore* се сумираат геодните висини добиени од *ГГМ*, резидуалите од чекорот *compute* и поправките за влијанието на топографијата.

Во рамки на двата метода ќе бидат извршени евалуации на влијанијата на различни влезни параметри и влезни податоци врз дефинитивните решенија.

### 1.3 Цел на истражување

Креирањето на услови за дефинирање на геодни модели зависи од повеќе типови на мерења кои беа претходно наведени. Во оваа теза целта е да се направи избор на локален модел на геод кој се карактеризира со најмала средна квадратна грешка (стандардна девијација) при споредба со геодетските точки врз кои се направени ГНСС-нивелмански мерења. Тоа значи избор на најповолен хибриден геод, добиен со користење на гравиметриски и геометриски геод.

Изборот на дефинитивни модели претставува процес на кој му претходат други валидации кои мораат да бидат направени, како што е валидација на *ГГМ*, валидација на *ДЕМ* и валидација на интерполациски методи. Валидациите се прават преку пресметување на вредностите за средна квадратна грешка (*STD*).

Прва е валидацијата на *ГГМ* кои се користат. Таа валидација може да биде спектрална или просторна. Спектралната валидација се прави преку пресметување на повеќе големини со кои се дефинираат *ГГМ*. Пресметките се вршат преку користење на коефициентите и нивните грешки кои се добиваат од *ICGEM*. Спектралната анализа се врши помеѓу избраните *ГГМ*. Просторната анализа се врши во однос на терестричките ГНСС-нивелмански мерења, преку споредба на гравиметриски и геометриски ундулации.

Таа споредба се прави преку користење на различни максимални степени на експанзија на моделите за добивање на ундулации и аномалии на Земјина тежа. Изборот на ГТМ кој се карактеризира со најмала грешка е суштинска во пресметките на гравиметриски геоид.

Валидацијата на теренските модели се прави преку ортометриските висини на геодетските точки и преку терестричките аномалии во слободен воздух. Целта е да се види каков е односот на теренските модели со терестрички добиените надморски висини, додека пак преку аномалиите ќе се определат нивните меѓусебни согласувања.

Методите на интерполација се важен сегмент од овој труд. Со оглед на фактот дека аномалиите на Земјина тежа се добиени за одреден број точки од предметното подрачје, неопходна е примена на соодветно интерполирање за добивање на аномалии на одредено растојание и креирање на GRID мрежа од истите. Растојанието на кое се дефинираат зависи од избраната резолуција на излезниот модел на геоидот. Крос-валидацијата на аномалиите на Земјината тежа е начинот преку кој се определување на *STD* на интерполацијата, ќе се добијат резултатите со кои ќе се покаже кој метод е најповолен за избраното подрачје. Интерполацијата ќе се направи на аномалиите во слободен воздух и на непотполните Бугеови аномалии во рамки на предметното подрачје.

Покрај валидација на влезните податоци, се наметнува и потребата за испитување на можностите кои ги нудат методите кои ќе се применат. Целта е преку промена на влезните параметри и влезните податоци да се генерираат гравиметриски модели. Тоа значи пресметување на доста голем број комбинации за двете методи.

Гравиметриските модели мора да се валидираат со геометриските модели и да се пресметаат *STD* вредностите на разликите од ундулациите. Тие грешки се пресметуваат без израмнување на разликите или со вметнување на параметарски израмнувања. Потребата од избор на соодветен параметарски модел произлегува од фактот дека гравиметрискиот и геометрискиот геоид имаат различен вертикален датум.

Преку избор на соодветен параметарски модел, вршење на оцена на точност и додавање на разликите на гравиметриските ундулации се добива хибридниот модел кој е крајна цел на овој докторски труд.

#### 1.4 Досегашни достигнувања поврзани со предметот на истражување

Креирањето на геоидни решенија како предмет на истражување е нешто што во регионот и во светот никогаш не завршува. Целта на геодетската јавност е добивање на решение кое се карактеризира со грешка помала од 1 *cm*. Тоа е нешто што се уште во голем број на држави е недостижно.

Досегашните истражувања можат да се поделат на две категории: регионален и локален геоид. Регионалните геоиди се тие чија примена е најголема, со оглед на фактот дека практично станува збор за национални решенија кои се користат на државно ниво. Локалниот геоид е најдоброто решение за одредено подрачје кое нема да најде примена на државно ниво, но ќе ги прикаже кои се можностите за дефинирање на такво неправилно тело. Суштински, обидот во мојата докторска дисертација е насочен кон определување на локален геоид, кој ако се покаже како адекватна замена за нивелманските мерења, тогаш да се примени методологијата за дефинирање на национален (регионален) геоид.

Од аспект на регионални геоиди кои се креирани на подрачјето на Балканот, вредни се да се споменат: Република Хрватска со точност од 3.5 *cm* (Varga, 2018), Република Србија (Odalović, 2006) со 7.7 *cm*, Република Босна и Херцеговина (Krdžalić & Abbak, 2023) со

грешка од 5.6 *cm*, Република Бугарија (Peneva, 2002) и Република Грција (Paraskevas *et al.*, 2023) со точност од 6 *cm*.

Од друга страна, локалните геоиди се тие кои се потесно поле на интерес во рамки на мојата докторска дисертација и такви модели се направени во повеќе наврати: со примена на *KTH* методата и добивање на точност од 2.5 *cm* за територијата на Аверњ регионот во Република Франција (Abbak & Ustun, 2014), 2D FFT метода со точност од 1.9 *cm* за делот на северен Алжир (Benahmed Daho *et al.*, 2006), *CSH* метода со точност од 2.7 *cm* за регионот Аверњ (Abbak *et al.*, 2024), споредба на *KTH* и *CSH* методите со точност од 6.7 *cm* и 9.8 *cm* за територијата на затворениот базен во близина на градот Конија, Република Турција (Abbak *et al.*, 2012).

Можеме да кажеме дека постојат повеќе методи за определување на моделите на локален и регионален геоид. Забележуваме дека различни истражувања се карактеризираат со различна точност при конечната валидација на моделите. Тоа не значи дека одредена метода е подобра од друга, туку зависи од влезните податоци (нивелмански, гравиметриски и сателитски мерења) со кои се располага. Со оглед на фактот дека станува збор за три типа на податоци кои се потребни за добивање на еден модел, сосем е сигурно дека трите типа на податоци не се придобиеени со мерење од страна на еден оператор или една институција, па затоа и тоа е еден од факторите кои влијаат на точноста со која тие се добиени.

### 1.5 Предглед на поглавја

Во поглед на организираноста на самата докторска дисертација, истата е составена од девет поглавја.

Во поглавје 1 кое е воведно се образложува зошто е избрана оваа тема на докторскиот труд, како и предметот и целта на истражувањето, заедно со досегашните истражувања постигнати во областа на докторскиот труд. Исто така, во ова поглавје се прикажани организацискиот редослед на докторскиот труд, со објаснување за секое поглавје.

Во поглавје 2 се објаснети основите на полето на Земјина тежа, што претставува реално поле и нормално поле на Земјина тежа, како и поимот за пореметувачки потенцијал и зошто е тоа важно, како и поврзаноста со темата на трудот.

Следното поглавје 3 е исполнето со објаснување за редуkcиите на Земјиното забрзување кои постојат и се искористени за добивање на геоидните модели, како и аномалиите на Земјина тежа кои практично претставуваат појдовни елементи кон дефинирање на влезните параметри во рамките на методите кои се употребени.

Поглавје 4 ги презентира теориските концепти за определување на моделите на геоид, односно кои се влезните податоци што се потребни за пресметки, како и методите што се искористени.

Во поглавје 5 се дефинирани предметното подрачје за пресметка на геоид, потребните податоци за негово пресметување, како и валидацијата на интерполациските методи заедно со *ГГМ* и *ДЕМ* моделите.

Поглавјата 6 и 7 ја прикажуваат практичната обработка на мерењата со користење на секоја од методите со кои се креираат повеќе модели за секоја од методите и се прикажани графички модели на влезните параметри, како и модели на дефинитивните геоиди со табеларен приказ на точностите со кои истите се карактеризираат.

Во поглавјето 8 се прикажани споредбите меѓу моделите добиени со различни методи и дефинитивниот избор за најпогоден модел на геоид.

Поглавјето 9 е последното каде се презентира заклучокот од сето она што претходно е анализирано во теориски и практичен аспект, со очекуваниот научен придонес на тоа што се добива како дефинитивен резултат од обработката на податоците, како и понатамошни насоки за истражување за подобрување на моделите на геодид кои во иднина би се пресметувале на локално или национално ниво.

Последното поглавје е дефинирано со список на применатата литература и референтни извори кои се користени за потребите на изработување на докторскиот труд.

## 2. ОСНОВИ НА ПОЛЕ НА ЗЕМЈИНА ТЕЖА

Дефинирањето на геоидот како еквипотенцијално тело претставува сложена постапка каде централно место завземаат аномалиите на Земјина тежа. Тие претставуваат разлики на реалното и нормалното поле на Земјина тежа. Реалното поле е дефинирано преку геопотенцијалот кој претставува збир на гравитацискиот и центрифугалниот потенцијал. Основните изрази за сите составни делови од потенцијалот и силата на Земјината тежа како негов извод заедно со теориската основа ќе бидат опишани во рамки на ова поглавје.

### 2.1 Потенцијал

Согласно Њутновиот закон за гравитација, две точки со одредени маси на одредено растојание се привлекуваат со силата:

$$F = k \frac{m_1 m_2}{l^2} \quad (2.1)$$

каде  $k$  е Њутновата гравитациска константа ( $6.67430 \times 10^{-11} m^3 \cdot kg s^{-2}$ ),  $m_1$  и  $m_2$  ги претставуваат телата со одредена маса и  $l$  е растојанието помеѓу точките. При привлекување кое е симетрично, едната точка би била привлекувачка маса, додека другата би привлекуваната маса. За поедноставување, привлекуваната маса ја изедначуваме со еден, додека привлекувачката маса ја означуваме со  $m$ . Тогаш, формулата (2.1) го добива следниот облик:

$$F = k \frac{m}{l^2} \quad (2.2)$$

Со воведување на тродимензионален правоаголен координатен систем  $xyz$ , можеме да ги претставиме координатите на привлекувачката маса со  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , додека пак координатите на привлекуваната точка  $P$  со  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Силата на привлекување може да се претстави со вектор  $F$  чии компоненти се:

$$\begin{aligned} X &= -F \cos \alpha = -\frac{km}{l^2} \frac{x - \xi}{l} = -km \frac{x - \xi}{l^3} \\ Y &= -F \cos \beta = -\frac{km}{l^2} \frac{y - \eta}{l} = -km \frac{y - \eta}{l^3} \\ Z &= -F \cos \gamma = -\frac{km}{l^2} \frac{z - \zeta}{l} = -km \frac{z - \zeta}{l^3} \end{aligned} \quad (2.3)$$

каде растојанието  $l$  го пресметуваме со координатите на двете точки:

$$l = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2} \quad (2.4)$$

Следно, го воведуваме поимот гравитациски потенцијал кој претставува скаларна функција зададен со формулата (2.5):

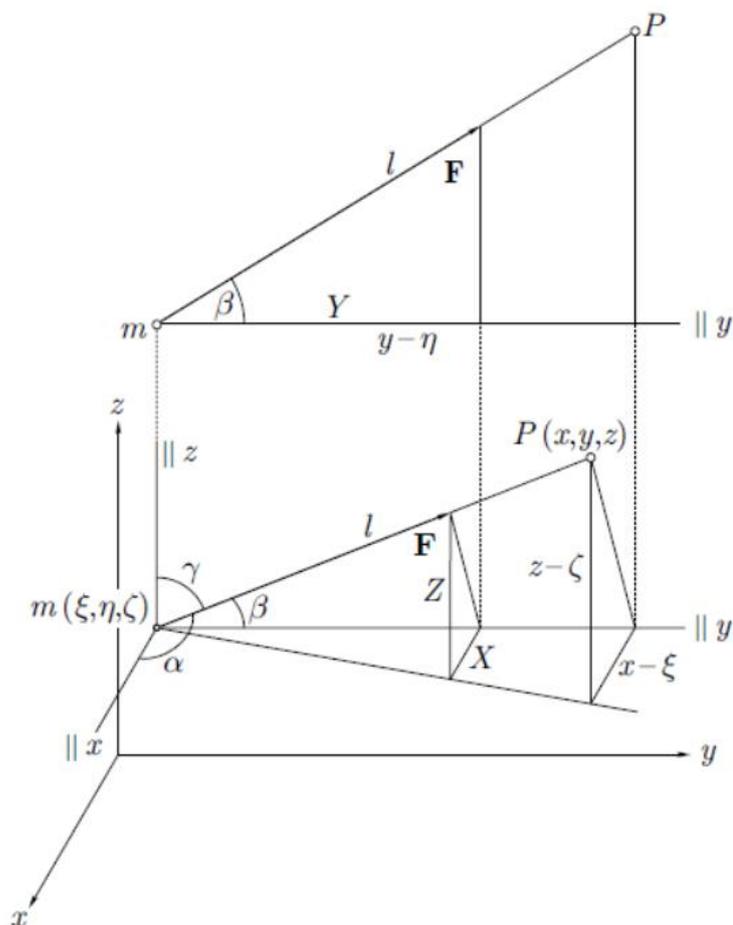
$$V = k \frac{m}{l} \quad (2.5)$$

Компонентите  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  на гравитациската сила  $F$  можеме да ги претставиме со користење на гравитацискиот потенцијал, па следат формулите (2.6):

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, Y = \frac{\partial V}{\partial y}, Z = \frac{\partial V}{\partial z} \quad (2.6)$$

Согласно формулите (2.3) и (2.6) можеме да заклучиме дека векторот на силата  $F$  всушност претставува вектор-градиент на скаларната функција – гравитациски потенцијал  $V$ . Важна е констатацијата дека векторот на привлекувачката сила може да се замени со потенцијалот  $V$ , со оглед на фактот дека во геодезијата ги третираме привлекувањата на системи од точкести маси или цврсти тела. При анализите, полесно е да се третира една функција, наместо трите компоненти на привлекувачката сила. Дури и во покомплексни решенија, функцијата  $V$  е сума на повеќе потенцијали од масите кои се анализираат (Heiskanen & Moritz, 1967).

На Слика 2.1 се прикажани компонентите на привлекувачката сила со која точката  $m$  влијае на точката  $P$  со сила  $F$ .



Слика 2.1 Компонента на гравитациска сила (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005)

Покрај гравитацискиот потенцијал, потенцијалот на Земјината тежа се состои од уште една компонента, а тоа е центрифугалниот потенцијал  $\Phi$ . Центрифугалната сила е

таа која влијае на тела кои ротираат околу одредена оска. Тоа би значело дека ако одредена точка ротира околу својата оска, тогаш на истата влијае центрифугална сила чиј израз е дефиниран со формулата (2.7):

$$F_c = \omega^2 r \quad (2.7)$$

каде  $F_c$  е центрифугалната сила,  $\omega$  е брзината на аголна ротација и  $r$  претставува растојанието на материјалната точка од оската на ротација (Srbinoski, 2008). Оваа сила делува нормално на оската на ротација. Слично како и кај гравитациската сила и тука може да се воведат тродимензионален координатен систем дефиниран со  $x, y$  и  $z$  координати на точката. Со помош на тие координати можеме да го пресметаме растојанието од оската на ротација до точката. Ако за растојанието  $r$  ги замениме координатите, тогаш формулата (2.7) би го имала обликот:

$$F_c = \omega^2 \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2.8)$$

Со дефинирање на вториот израз за центрифугална сила, можеме да го изведеме и изразот за центрифугален потенцијал  $\Phi$ :

$$\Phi = \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) \quad (2.9)$$

Од изразот (2.9) може да се заклучи дека силата претставува прв извод од центрифугалниот потенцијал во правец на растојанието  $r$ . Со тоа практично градиентот на центрифугалниот потенцијал е еднаков на векторот на центрифугалната сила. Ако се направи двојно диференцирање во правец на трите оски на центрифугалниот потенцијал, тогаш се добива изразот (2.10):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \omega^2 + \omega^2 + 0 = 2\omega^2 \quad (2.10)$$

Гравитацискиот потенцијал и неговите први изводи се непрекинати функции во целиот простор. Во одредени случаи, вторите изводи на потенцијалот имаат прекини при што густината на масите се менува скоковито, а такви случаи се појавуваат на граница помеѓу две тела (Srbinoski, 2008). Прекините се дефинирани со изразот (2.11) (Heiskanen & Moritz, 1967):

$$\Delta V = -4\pi k \rho \quad (2.11)$$

каде  $k$  е Њутновата гравитациска константа, додека  $\rho$  е густината на масата. Овој израз е познат како Пуасонова диференцијална равенка.

Надвор од телата, во просторот каде нема присуство на маса, односно каде густината е еднаква на нула, важи Лапласовата диференцијална равенка. Решенијата на Лапласовата равенка претставуваат хармониски функции. Нејзиниот облик е дефиниран со изразот (2.12) (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005):

$$\Delta V = 0 \quad (2.12)$$

Со дефинираните изрази, гравитацискиот потенцијал е хармониска функција надвор од привлекувачките маси, додека на површините од телата и во нивната внатрешност тој ја задоволува Пуасоновата равенка. Нејзиното решавање е возможно само доколку се познаваат масите, односно нивниот распоред и густина во внатрешноста на телото (Srbinoski, 2008). Со дефинираните изрази за диференцијалните равенки, може да се заклучи дека центрифугалниот потенцијал не ја задоволува Лапласовата равенка, односно неговата вредност е секогаш различна од нула. Мерна единица за гравитацискиот потенцијал е  $m^2 \cdot s^{-2}$ .

## 2.2 Поле на Земјина тежа

Резултантната сила која дејствува на Земјината површина и е збир на гравитациската и центрифугалната сила се нарекува сила на Земјина тежа. Тоа би значело дека и потенцијалот на Земјината тежа -  $W$  би бил сума од гравитацискиот потенцијал  $V$  и центрифугалниот потенцијал  $\Phi$ , дефиниран со изразот (2.13):

$$W = W(x, y, z) = V + \Phi = k \iiint_v \frac{\rho dv}{l} + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (2.13)$$

Пуасоновата равенка за потенцијалот на Земјината тежа е дефинирана со изразот (2.14):

$$\Delta W = -4\pi k\rho + 2\omega^2 \quad (2.14)$$

Со оглед на фактот дека центрифугалниот потенцијал е аналитичка функција, сите нерегуларности се препишуваат на гравитацискиот потенцијал, односно се препишуваат на промените во густините на Земјините маси. Градиентот на потенцијалот на Земјината тежа е дефиниран со изразот (2.15):

$$g = \text{grad } W = \left[ \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z} \right] \quad (2.15)$$

и се нарекува вектор на Земјина тежа. Неговото дејствување претставува збир на гравитациската и центрифугалната сила на единица маса, а кој е дефиниран со вредност и правец. Вредноста  $g$  се нарекува сила на Земјина тежа, а физички е дефинирана како забрзување чија мерна единица е  $1 \text{ gal} = 1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$ . Најчесто единиците кои се користат за дефинирање на силата на Земјина тежа се  $m \cdot \text{s}^{-2}$  или  $m\text{gal}$ . Релациите помеѓу мерните единици се зададени со изразот (2.16):

$$\begin{aligned} 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} &= 100 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2} = 100 \text{ gal} \\ 1 \text{ gal} &= 1000 \text{ mgal}, 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 100000 \text{ mgal} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Причината за користење на  $m\text{Gal}$  во пресметките е бидејќи доста голем дел од податоците поврзани со Земјиното забрзување се со ниски вредности, па поприфатливо е користење на  $m\text{Gal}$ , наместо  $m \cdot \text{s}^{-2}$ . Мерењата на вредностите за силата на Земјината тежа ги правиме со апсолутни и релативни гравиметри. Во пресметките се користат мерните вредности за Земјиното забрзување -  $g$ .

### 2.3 Нормално поле на Земјина тежа

Во својата прва претпоставка низ историјата, Земјата се поистоветува со форма на идеална сфера, но во понатамошните истражувања, се вовеле и други дефинирања со кои таа се дефинирала како ротирачко елипсоидно тело. Иако во најновите испитувања се докажува дека Земјата е нерегуларно тело со променливи маси во внатрешноста, сепак гравитациското поле на елипсоидот е од фундаментално значење, бидејќи може математички да се дефинира. Практично, разликите меѓу реалното и нормалното поле на Земјата се доста мали. Тие мали разлики го дефинираат пореметувачкото поле на потенцијалот за кое ќе стане збор во поглавје 2.4.

На овој начин, можеме да ја дефинираме Земјата со ниво елипсоид кој е еквипотенцијална површина на нормалното поле на Земјина тежа. Важна е оваа констатација, бидејќи ниво елипсоидот претставува нормална форма на геоидот кој е еквипотенцијална површина за реалното поле на Земјина тежа. Потенцијалот на нормалното поле на Земјина тежа го дефинираме со изразот (2.17):

$$U = U(x, y, z) \quad (2.17)$$

Може да се заклучи дека нормалниот потенцијал  $U=const$  е еднаков со потенцијалот на Земјината тежа  $W=const$ . Исто така, за нормалниот потенцијал можеме да го дефинираме и изразот :

$$U = V + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) \quad (2.18)$$

од каде произлегува дека дека тој е дефиниран со:

- Обликот на ротирачкиот елипсоид со познати голема полуоска  $a$  и мала полуоска  $b$ ;
- Вкупната маса  $M$ ;
- Аголна брзина на ротација  $\omega$ .

Слично како и кај реалното поле на Земјината тежа, така и во нормалното поле најголема примена во пресметките има нормалното Земјино забрзување  $\gamma$ . Векторот на нормалното забрзување  $\gamma$  е дефиниран како градиент на потенцијалот  $U$  со изразот (2.19)(Varga, 2018):

$$\gamma = \nabla U = -\gamma_0 \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\lambda \\ \cos\varphi\sin\lambda \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

каде  $\gamma_0$  е дефинирано како нормално Земјино забрзување на површината од нивовскиот елипсоид,  $\varphi$  и  $\lambda$  се геодетските ширина и должина, додека  $U_x, U_y$  и  $U_z$  се парцијални изводи од нормалниот потенцијал. Нормалното Земјино забрзување се добива како прв извод од потенцијалот  $U$  по елипсоидната висина  $h$ .

Основоположник на теоријата на нивовскиот елипсоид е Клеро кој ја дефинира Клероовата теорема и ја претставува една од фундаменталните равенки во физичката геодезија со која се прави поврзување на геометриските параметри како првата сплеснатост на референтниот елипсоид  $\mu$  и физичките параметри како сила на Земјина

тежа и аголната брзина на Земјина ротација. Од таа теорема произлегува изразот (2.20) (Srbinoski, 2008):

$$\mu + \frac{\gamma_p - \gamma_o}{\gamma_o} = \frac{5 \omega^2 a}{2 \gamma_o} \quad (2.20)$$

Во рамки на Клероовата теорема е дефиниран и коефициентот  $\beta$  кој го претставува соодносот на разликата од нормалното забрзување на половите и екваторот и вредноста на Земјиното забрзување на екваторот со изразот (2.21):

$$\beta = \frac{\gamma_p - \gamma_o}{\gamma_o} \quad (2.21)$$

Со оглед на фактот дека вредностите за нормалните забрзувања на половите и екваторот се непознати големини, при нивното определување треба да се има предвид дека мерењата за Земјиното забрзување се вршат на физичката површина од Земјата, додека нормалните забрзување се однесуваат на ниво елипсоидот. Исто така, при мерењата на физичката површина од Земјата секогаш се придружени со одредени грешки. Со цел што е можно поголемо елиминирање на грешките и намалување на разликите меѓу големините, потребно е мерењата од реалното поле на Земјината тежа да се сведат на површината на ниво елипсоидот, како и редуван број на мерења со цел да се овозможи израмнување на вредностите.

Практично со дефинирање на равенки со кои ќе се определува нормалното забрзување во одредена точка од нивовскиот елипсоид се занимавале повеќе научници. Секако прв кој предложил таков израз е Клеро (2.22):

$$\gamma = \gamma_o(1 + \beta \sin^2 \varphi) \quad (2.22)$$

Понатаму со овие пресметки се занимавале Хелмерт во 1901 година (2.23):

$$\gamma = 978.046^{gal}(1 + 0.005302 \sin^2 \varphi + 0.000007 \sin^2 2\varphi) \quad (2.23)$$

и Хеисканен во 1924 година (2.24):

$$\gamma = 978.049^{gal}(1 + 0.005293 \sin^2 \varphi + 0.000007 \sin^2 2\varphi) \quad (2.24)$$

Изразите (2.23) и (2.24) претставуваат емпириски формули за пресметка на нормалното забрзување со користење на податоци од елипсоидот дефиниран со димензиите на Хајфорд.

Научникот кој ја дефинирал формулата за строго определување на нормалното забрзување е Сомилјана (Somigliana, 1929) со изразот (2.25):

$$\gamma = \frac{a\gamma_o \cos^2 \varphi + b\gamma_p \sin^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \quad (2.25)$$

Со овој израз се пресметани сите потребни нормални забрзувања на Земјината тежа во рамките на докторскиот труд. Пресметките се направени со користење на параметрите  $a$

и  $b$  од елипсоидот  $GRS 80$  кој е основа за  $ITRS 89$  и  $ETRS 89$  координатните системи. Елипсоидот  $GRS 80$  е дефиниран со четири параметри прикажани во Табела 2.1:

Табела 2.1 Константи на елипсоид  $GRS 80$ 

Параметар	Симбол	Вредност
Голема полуоска	$a$	6378137 $m$
Геоцентрична гравитациска константа	$GM$	$3.986005 \cdot 10^9 m^3 \cdot s^{-2}$
Динамички фактор	$J_2$	0.00108263
Аголна брзина на Земјина ротација	$\omega$	$7.2921159 \cdot 10^{-5} rad \cdot s^{-1}$

#### 2.4 Пореметувачко поле на Земјина тежа

Двата типа на потенцијали  $W$  и  $U$  се со големи нумерички вредности, па затоа е згодно да се воведат пореметувачкиот потенцијал или аномалиски потенцијал  $T=W-U$ . Практично, двата потенцијали го содржат центрифугалниот потенцијал, па пореметувачкиот потенцијал е хармониски само надвор од Земјината маса. Како што беше посочено во поглавјето 2.2 силата на Земјината тежа е градиент на потенцијалот на Земјината тежа долж вертикалата, но со обратен предзнак (2.26):

$$g = -\frac{\partial W}{\partial n'} = -\frac{\partial W}{\partial h} = -\frac{\partial W}{\partial r} \quad (2.26)$$

Слично во поглавје 2.3 нормалната сила на Земјина тежа е дефинирана како градиент на нормалниот потенцијал на референтниот елипсоид, исто така со обратен предзнак (2.27):

$$\gamma = -\frac{\partial U}{\partial n} = -\frac{\partial U}{\partial h} = -\frac{\partial U}{\partial r} \quad (2.27)$$

Во овие изрази,  $n'$  претставува тангентата на вертикалата,  $n$  е нормала на референтниот елипсоид низ набљудуваната точка,  $r$  е радиус од центарот на Земјата,  $h$  е висина по нормалата до елипсоидот (елипсоидна висина) (Sjöberg & Bagherbandi, 2017).

Оттука, може да се пресметаат две големини: пореметувачката сила на Земјина тежа која ја претставува директно разликата на измереното Земјино забрзување и нормалното забрзување (2.28) и аномалиите на Земјина тежа (2.29):

$$\delta g = g - \gamma = -\frac{\partial T}{\partial r} \quad (2.28)$$

и

$$\Delta g = g_g - \gamma \quad (2.29)$$

каде  $g_g$  е редуцираното Земјино забрзување сведено на површината од геоидот, додека  $\gamma$  е нормалното забрзување на референтниот елипсоид. Од двете равенки, важна ни е втората каде се врши определување на гравитациските аномалии, со оглед на фактот дека за определување на пореметувачкото забрзување во минатото било потребно да се знае елипсоидната висина, а тоа не било случај пред појавата на ГНСС приемниците (Sjöberg & Bagherbandi, 2017).

Ако се направи развивање по Тејлоров ред на нормалниот потенцијал на референтниот елипсоид долж нормалата, тогаш се добива пореметувачкиот потенцијал на геоидот (2.30):

$$T_g = W_g - U_g = U_o - \left( U_o + N \frac{\partial U}{\partial h} + \dots \right) = N\gamma_o + \dots, \quad (2.30)$$

каде  $U_o$  е нормалниот потенцијал на референтниот елипсоид. Оттука, се добива приближната Брунсова формула (Brunns, 1878) за пресметка на геоидната ундулација, односно геоидните висини кои ја дефинираат површината на геоидот (2.31):

$$N = \frac{T_g}{\gamma_o} \quad (2.31)$$

Доколку се изврши развивање по Тејлоров ред за нормалното забрзување, тогаш се добива равенката (2.32):

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial h} + \frac{\partial \gamma}{\partial h} T \quad (2.32)$$

која претставува фундаментална равенка во физичката геодезија и се однесува на геоидот, додека најважна равенка е нејзината апроксимација на сфера. За да ја добиеме, потребно е  $\partial h \approx \partial r$  и  $\gamma = GM-r^2$ , при што се добива  $\frac{\partial \gamma}{\partial r} \approx -2\gamma-r$ . Со оглед на промените, се добива равенката за сферна апроксимација на граничниот услов (2.33):

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - 2\frac{T}{r} \quad (2.33)$$

Нејзиното решение е прикажано за прв пат од страна на Стокс (Stokes, 1849). Практично со низа на калкулации, пред се интеграција на равенката (2.33), се добива дефинитивната равенка за пресметка на пореметувачкиот потенцијал  $T$  на површината од геоидот (2.34):

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma \quad (2.34)$$

каде  $r = R$ ,  $\Delta g$  се гравитациските аномалии,  $S(\psi)$  ја претставува Стоксовата функција. Со помош на замена на равенката (2.34) во равенката (2.31) се добива дефинитивната равенка за пресметка на геоидната ундулација  $N$  со која се комплетира најважната равенка во физичката геодезија (2.35):

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma \quad (2.35)$$

Овие равенки со кои се дефинира Стоксовиот интеграл за пресметка на пореметувачкиот потенцијал и геоидната ундулација важат само доколку се исполнети условите:

- Референтниот елипсоид има ист потенцијал како и геоидот ( $U_o = W_o$ );
- Масата на референтниот елипсоид е еднаква на Земјината маса;
- Центарот на елипсоидот кореспондира со центарот на Земјината тежа.

Со оглед на фактот дека првите два услови не се задоволуваат преку референтните елипсоиди, потребно е да се воведат одредени модификации на Стоксовиот интеграл за што ќе биде подетално објаснето во поглавје 4.4 **Error! Reference source not found.** Исто така, пореметувачкиот потенцијал е хармонична функција надвор од геоидот, што би значело дека ефектот на масите над нивото на геоидот мораат да бидат отстранети преку воведување на гравитациски редуции за што ќе стане збор во поглавје 3.

### 3. РЕДУКЦИЈА И АНОМАЛИИ НА ЗЕМЈИНА ТЕЖА

#### 3.1 Вовед

Земјиното забрзување  $g$  кое се мери на површината од Земјата не може директно да се спореди со нормалното забрзување  $\gamma$  кое се однесува на референтниот елипсоид. Тоа практично значи дека мора да се направи одредена поправка (редукција) на мерената вредност  $g$ . Со тоа практично се врши редуцирање на вредноста од физичката површина на Земјата на површината на геоидот кој се поистоветува со нивото на светското море (Heiskanen & Moritz, 1967).

Гравитациските редукции, односно редукиите на Земјината тежа се прават од три причини:

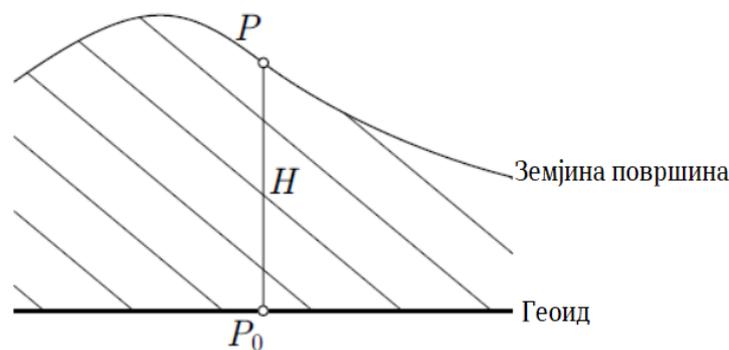
- Определување на обликот на геоидот;
- Интерполација и екстраполација на Земјиното забрзување;
- Определување на Земјината кора.

Со користење на Стоксовата формула (2.35) значи дека гравитациските аномалии  $\Delta g$  ќе ги претставуваат граничните вредности на геоидот. Тоа вклучува два услова:

- Силата на Земјината тежа да се однесува на површината од геоидот;
- Да не постојат маси надвор од геоидот.

Практично, редукиите на Земјината тежа би се извршиле во два чекора Слика 3.1:

- Топографските маси надвор од геоидот да се отстранети или вметнати под нивото на светското море;
- Точката од површината на Земјата ( $P$ ) да се пренесе на површината од геоидот ( $P_0$ ).



Слика 3.1 Редуција на Земјина тежа (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005)

Во геодезијата и геофизиката повеќе методи постојат за дефинирање на редукии на Земјина тежа: слободен воздух (*free-air*), Бугеова, прва и втора Хелмертова кондензација, Молоденски, Ери-Хеисканен, Прат-Хејфорд, Венинг-Мајнс, инверзија на Рудкци, како и *RTM* (моделирање на теренски резидуали) (Varga, 2018). Со изборот на одредена редуција би требало да произведат мали и глатки аномалии на Земјината тежа

( $\Delta g$ ) со мал индиректен ефект (Heiskanen & Moritz, 1967). Тоа би значело дека сите редукции би резултирале со истите аномалии, а со тоа и со истиот модел на геоид. Сепак не е таков случајот, па само одредени редукции даваат практични, едноставни резултати. Затоа само три методи се издвојуваат како корисни: Молоденски, Хелмертовата втора кондензација со која топографијата околу предметната точка се сведува на значително мал слој од геоидот (Sjöberg & Bagherbandi, 2017) и *RTM* методот каде се користат остатоци на аномалиите на Земјина тежа (Forsberg & Tscherning, 1981). За дел од редуциите и аномалиите на Земјината тежа ќе стане збор во продолжение на ова поглавје. Најголема улога во пресметките во рамки на овој докторски труд ќе имаат аномалиите во слободен воздух и Бугеовите аномалии за *KTH* методата (поглавје 4.4.1 **Error! Reference source not found.**), додека пак со помош на теренските корекции и втората Хелмертова кондензација ќе се вршат пресметки со примена на *CSH* методата (поглавје 4.4.2).

### 3.2 Редуција во слободен воздух

Како што напоменавме во воведниот дел на ова поглавје, за да биде применливо Земјиното забрзување, мерената вредност мора да добие одредена редуција со која точката од физичката површина на Земјата, ќе се доведе на површината на геоидот. Тоа го постигнуваме со помош на редуцијата во слободен воздух  $\delta_{FA}$ .

За да ја добиеме оваа редуција, се користи парцијалниот извод на Земјината тежа по ортометриската висина ( $\partial g - \partial H$ ), а тоа всушност го претставува вертикалниот градиент на Земјината тежа. Практично, вредноста на Земјината тежа  $g_0$  во точката  $P_0$  на површината од геоидот би ја добиле доколку на мерената вредност за Земјиното забрзување би ја додале поправката во слободен воздух :

$$g_0 = g + \delta_{FA} \quad (3.1)$$

каде

$$\delta_{FA} = -\frac{\partial g}{\partial H} H \quad (3.2)$$

Причината зошто оваа поправка го носи ова име е бидејќи не се земаат во предвид масите помеѓу геоидот и физичката површина на Земјата (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005). Ако се искористи нормалното Земјино забрзување и елипсоидната висина, тогаш изразот (3.2) можеме да го запишеме како (3.3):

$$\delta_{FA} = -\frac{\partial \gamma}{\partial h} H \approx +0.3086H \quad (3.3)$$

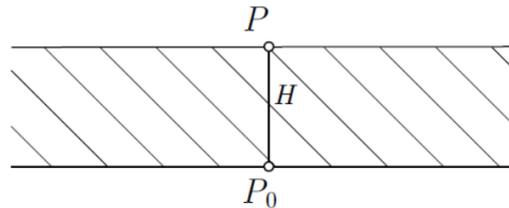
каде

$$\gamma \approx \frac{kM}{r^2} \rightarrow \frac{\partial \gamma}{\partial r} = -\frac{2\gamma}{r} \quad (3.4)$$

Изразот (3.3) го добиваме доколку во изразот (3.4) за вредностите на  $\gamma = 979.77 \text{ gal}$  и  $r = 6371200 \text{ m}$ . Со изразот (3.3) ги добиваме редуциите во слободен воздух изразени како  $\text{mGal}$ , доколку надморската висина  $H$  ја изразиме во метри.

### 3.3 Бугеова редуција

Со воведување на редуцијата во слободен воздух, ние ја доведуваме вредноста на Земјиното забрзување на површината од геоидот, но сепак познато е дека просторот меѓу физичката површина на Земјата и геоидот е исполнет со топографски маси чие влијание мора да биде земено во предвид. Затоа се дефинира Бугеовата редуција со која се отстрануваат масите надвор од површината на геоидот. За определување на оваа редуција, се воведува претпоставката за Бугеова плоча прикажана на Слика 3.2:



Слика 3.2 Бугеова плоча

Таа би го претставувала идеално рамниот, хоризонтален простор помеѓу површините на Земјата и геоидот, каде вредноста на привлечната сила ја дефинираме со изразот (3.5) (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005):

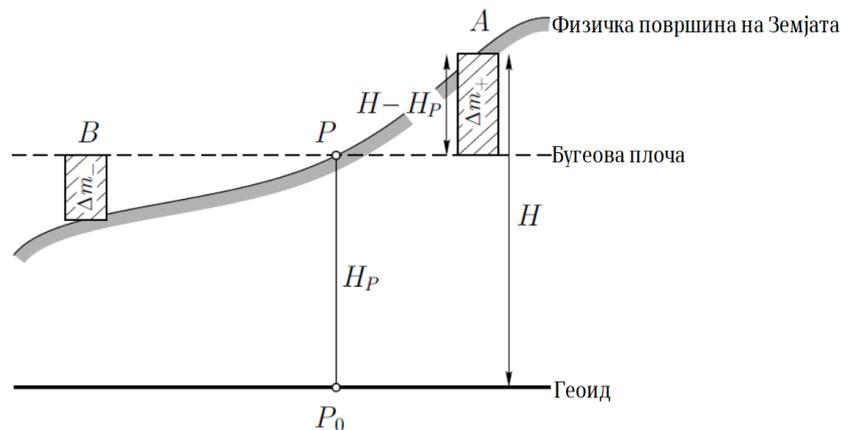
$$\delta_B = -2\pi k\rho H \quad (3.5)$$

Доколку во изразот се земе за просечна густина на Земјината кора  $\rho = 2.67 \text{ g-cm}^3$ , тогаш вредноста на  $\delta_B = -0.1119H \text{ mgal}$  за вредност на надморската висина изразена во метри. Тоа ја претставува вредноста на непотполната Бугеова редуција. За целосно дефинирање на вредноста на Земјиното забрзување на површината од геоидот потребно е оваа редуција да се докомплетира со редуцијата во слободен воздух со што ја добиваме потполната Бугеова редуција  $\delta_B = 0.1967H \text{ mgal}$ . Со тоа се дефинира конечната равенка за дефинирање на вредноста на Земјиното забрзување редуцирано на површината на геоидот со користење на потполната Бугеова редуција (3.6):

$$g_0 = g + \delta_{FA} + \delta_B = g + 0.3086H - 0.1119H = g + 0.1967H \quad (3.6)$$

### 3.4 Теренска редуција

Во рамки на понатамошно што е можна подобра пресметка на редуцираните вредности за Земјиното забрзување, следна е теренската редуција, при која во предвид се земаат топографските маси кои ја опкружуваат предметната точка на Земјината физичка површина и кои отстапуваат од идеална Бугеова плоча прикажано на Слика 3.3. Согласно приказот во точката А имаме суфицит на маса чие привлекување кое е насочено нагоре се отстранува, додека пак во точка В имаме дефицит на маса. Во двата случаи се предизвикува вредноста на Земјиното забрзување да расте, што значи дека оваа редуција секогаш е со позитивен предзнак (Heiskanen & Moritz, 1967), (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005).



Слика 3.3 Теренска редуција

Теренската редуција  $\delta_{TC}$  ја добиваме како сума од повеќе редуции кои се прават согласно распоредот на околните маси. Пр. за Слика 3.3  $\delta_{TC} = \delta_{TCA} + \delta_{TCB}$ . Доколку оваа редуција се додаде на потполната редуција од изразот (3.6), тогаш следни нова равенка за дефинирање на вредноста на Земјиното забрзување на површината од геоидот кое би било сума од претходно наведените редуции, дефинирано со изразот (3.7):

$$g_0 = g + \delta_{FA} + \delta_B + \delta_{TC} = g + 0.1967H + \delta_{TC} \quad (3.7)$$

Во пракса, најдобро е при пресметување да се прави разлика меѓу потполните Бугеови редуции и теренските редуции со оглед на фактот дека теренските поправки се доста помали, чија вредност изнесува  $50 \text{ mgal}$  за надморски висини од 3000 метри (Heiskanen & Vening Meinesz, 1958). Во рамки на овој докторски труд, теренските редуции ги добиваме со користење на софтверот *GravSoft* преку модулот *TC* (Forsberg & Tscherning, 2014) или преку мапата на теренски корекции добиена со *SRTM* дигиталните теренски модели (Hirt *et al.*, 2019).

Во рамките на топографските маси кои ја опкружуваат предметната точка на која се вршат мерењата, произлегуваат различни ефекти како: директен топографски ефект (*DTE*), примарен индиректен топографски ефект (*PITE*), секундарен топографски ефект (*SITE*) и когеоид. За овие ефекти ќе стане збор во понатамошниот дел од трудот.

#### 3.4.1 Директен топографски ефект (*DTE*)

Како што и претходно беше посочено, Бугеовата редуција не е соодветна за примена, па затоа потребно е да се направи компензација за привлекувачката сила на околните топографски маси. Со помош на равенката (3.7) вршиме корекција на мереното Земјино забрзување преку додавање на Бугеовата и теренската редуција. Како метода за компензација посочено е дека ќе се користи вториот метод на Хелмертова кондензација на топографијата во рамки на поглавје 7. Практично, со помош на таа метода, топографијата е кондензирана на површински слој на геоидот (средно ниво на морето) чија површинска густина е  $\rho H$  која е производ на густината со надморската висина на топографијата (Sjöberg & Bagherbandi, 2017).

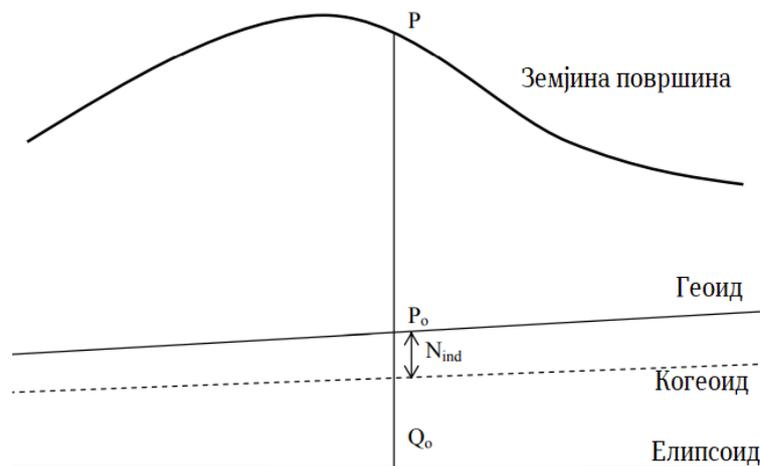
Со сумирање на теренската  $\delta_{TC}$  и компензацијата редуција  $\delta_C$  се добива директниот топографски ефект (*DTE*). Тоа би значело дека е исполнет условот со кој за да се применат интегралните формули за добивање на геоидот потребно е сите маси

надвор од сферата да бидат отстранети. Додавањето на редукацијата за директниот топографски ефект се нарекува уште и регуларизација (Sjöberg & Bagherbandi, 2017).

После додавање на оваа корекција, просторот помеѓу Земјината површина и геоидот останува хармониски, но поради Хелмертовата кондензација се појавуваат промени помеѓу реалниот потенцијал и оној на кондензираните маси (Abbak *et al.*, 2024). Оттука, произлегува и потребата за имплементирање и на редукација за секундарниот индиректен топографски ефект (*SITE*). Во рамките на пресметките се користат аномалиите на директниот топографски ефект кои се пресметуваат со пристапот на Мориц-Пелинен (Jekeli & Serpas, 2003), (Serpas, 2004).

### 3.4.2 Примарен и секундарен индиректен ефект

Со втиснување на топографските маси на мал слој од геоидот, се предизвикува промена во геоидот која се нарекува индиректен ефект на гравитациските редукации (Heiskanen & Moritz, 1967), (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005). Тогаш би значело дека со Стоксовиот интеграл не би можело да се пресмета геоидот, туку површина блиска до геоидот која се нарекува когеоид.



Слика 3.4 Индиректен ефект, геоид и когеоид

Изразот (3.8) ја претставува равенката за пресметка на геоидната ундулација со помош на когеоидна ундулација и корекција за нивната разлика:

$$N = N^C + \delta N^{SITE} \quad (3.8)$$

Членот кој ја претставува разликата меѓу двете површини може да се пресметка преку изразот:

$$\delta N^{SITE} = \frac{\delta W}{\gamma} \quad (3.9)$$

каде  $\delta W$  е промената на потенцијалот предизвикана од кондензацијата. Кај Бугеовите аномалии на Земјината тежа индиректниот ефект е голем, односно десет пати поголем во однос на самите геоидни ундулации, што ги прави самите аномалии непрактични при користењето за пресметка на геоидот. Бугеовите аномалии во рамките на овој докторски труд се користат исклучиво за интерполација, затоа што се поглатки од аномалиите во

слободен воздух. Корекцијата поради примарниот индиректен ефект е пресметана со изразот (3.10) (Sjöberg & Nahavandchi, 1999):

$$\delta N^{PITE} = -\frac{\pi k \rho H^2}{\gamma} - \frac{k \rho R^2}{6\gamma} \iint_{\sigma} \frac{H_Q^3 - H_P^3}{l_0^3} d\sigma \quad (3.10)$$

Во овој случај, Стоксовиот интеграл (2.35) би се користел за пресметка на површината на когеодот, тогаш аномалиите во истата треба да се гранични вредности на пресметаната површина (Heiskanen & Moritz, 1967). Тука, се користи редуција во слободен воздух со изразот (3.3). Практично, кондензациска редуција е непотребна, бидејќи масите меѓу геоидот и когеодот се мали, а нивното поместување на кратко растојание нема да направи значителна промена во  $\delta W$ . Со изразот (3.11) се пресметува секундарниот индиректен ефект на Земјината тежа:

$$\delta^{SITE} = 0.3086 \delta N^{PITE} \quad (3.11)$$

каде вредноста на  $\delta N^{PITE}$  ја изразуваме во метри, а  $\delta^{SITE}$  го изразуваме во mGal. Со погоре изнесените заклучоци, тогаш изразот (2.35), го запишуваме како (3.12) (Wichiencharoen, 1982):

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} (\Delta g + \delta^{SITE}) S(\psi) d\sigma + \delta N^{PITE} \quad (3.12)$$

### 3.5 Аномалии на Земјина тежа

Со оглед на споменатите редуции, практично се сведува вредноста на Земјината тежа од површината на Земјата на површината од геоидот. Тогаш, би се очекувало дека редуцираната вредност и нормалната вредност на Земјината тежа ќе бидат идентични. Сепак, тоа не е случај, со оглед дека повторно се појавуваат одредени разлики, кои ги нарекуваме гравитациски аномалии или аномалии на Земјината тежа. Овие разлики се појавуваат од повеќе причини (Srbinoski, 2008):

- разлика на геоидот со нивовскиот елипсоид;
- појава на локални промени во густина на топографските маси;
- појава на грешки во мерење на Земјиното забрзување

Разликите кои се добиваат можат да бидат позитивни или негативни. Позитивните разлики претставуваат постоење на вишок маса која е предизвикана од слоеви со поголема густина во однос на просечната густина ( $\rho = 2.67 \text{ g-cm}^3$ ) која ја користиме во пресметките. Од друга страна, негативните вредности за аномалиите би значело дека има маси во Земјината внатрешност кои имаат помала густина од просечната густина. Во зависност од предзнакот на аномалиите, имаме издигнување на површината од геоидот (позитивни аномалии) и спуштање на геоидот (негативни аномалии) (Srbinoski, 2008).

Во зависност од типот на редуцијата која се имплементира во пресметките, таков тип на аномалии се користат во понатамошните обработки. Затоа ќе бидат изнесени основите за аномалиите во слободен воздух и Бугеовите аномалии во следните поглавја,

бидејќи тие се двата типа на аномалии кои се користат во рамки на овој докторски труд. Општиот облик за пресметка на аномалиите на Земјина тежа би бил (3.13):

$$\Delta = g + \delta - \gamma \quad (3.13)$$

каде  $g$  е мерената вредност на Земјина тежа,  $\delta$  е соодветната редуција на мерената вредност,  $\gamma$  е нормалната вредност на Земјина тежа и  $\Delta$  е ознаката за аномалии на Земјината тежа.

### 3.5.1 Аномалии во слободен воздух

Првиот тип на аномалии се аномалиите во слободен воздух. Самото име кажува дека се добиваат со помош на редуциите во слободен воздух. Може да се каже дека овој тип на аномалии се основата и во двата методи за пресметка на геоид. Изразот за нивна пресметка е (3.14):

$$\Delta_{FA} = g + \delta_{FA} - \gamma \quad (3.14)$$

каде  $g$  е мерената вредност на Земјина тежа,  $\delta_{FA}$  е редуција во слободен воздух на мерената вредност,  $\gamma$  е нормалната вредност на Земјина тежа и  $\Delta_{FA}$  е ознаката за аномалии во слободен воздух на Земјината тежа.

### 3.5.2 Бугеови аномалии

Бугеовите аномалии се вториот тип на аномалии на Земјина тежа кои ги користиме во рамки на овој докторски труд. Се работи за аномалии кои во себе ги содржат поправките за топографските маси помеѓу точката на површината од Земјата и површината од геоидот и ги нарекуваме непотполни Бугеови аномалии  $\Delta_{SB}$ , кои се пресметуваат со изразот (3.15):

$$\Delta_{SB} = g + \delta_{FA} + \delta_B - \gamma \quad (3.15)$$

Покрај нив, постојат и потполни Бугеови аномалии  $\Delta_{CB}$  кои ги содржат и корекциите за топографскиот распоред во околината на предметната точка. Вредноста на овие разлики ги добиваме со изразот (3.16):

$$\Delta_{CB} = g + \delta_{FA} + \delta_B + \delta_{TC} - \gamma \quad (3.16)$$

каде  $g$  е мерената вредност на Земјина тежа,  $\delta_{FA}$  е редуција во слободен воздух на мерената вредност,  $\delta_B$  е Бугеова редуција,  $\delta_{TC}$  е теренска редуција и  $\gamma$  е нормалната вредност на Земјина тежа.

## 4. ОПРЕДЕЛУВАЊЕ НА ГЕОИД

### 4.1 Вовед

Во рамки на ова поглавје ќе бидат изнесени основите за тоа што претставува геоидот, податоците кои се потребни за негово практично определување, како и методите кои се користат за дефинирање на моделите.

Геоидот претставува еквипотенцијална површина која коинцидира со средното ниво на светското море (Srbinoski, 2008). Тоа значи дека во секоја неговата точка, вредноста на потенцијалот е константен. Во рамки на светската литература, геодетските научници низ историјата имаат блиски, но различни дефиниции за што претставува геоидот. Некои од нив следат во продолжение:

- (Gauss, 1828) – “Геоид е модел за физичката површина на Земјата и е дефиниран како еквипотенцијална површина на гравитациското поле која коинцидира со средното морско ниво на океаните и продолжува како невидлива нивовска површина низ континентите.”
- (Stokes, 1849) – “Математичката фигура на Земјата, таа површина со која морето ослободено од влијанијата на ветровите и плимата, на крајот се усогласува, не само над океаните, туку и под континентите.”
- (Listing, 1873) – “Геоид е математичка површина на Земјата која е најдобрата апроксимација на средното светско море.”
- (Torge & Müller, 2012) – “Површина од фундаментална важност за геодезијата, океанографијата и физиката на Земјата. Тој претставува референтна површина за опишување на континенталната и топографијата на морската површина.”
- (Sjöberg & Bagherbandi, 2017) – “Геоидот е еквипотенцијална површина на Земјиното поле на тежа кое најблиску коинцидира со мирното ниво на светското море и продолжува низ континентите. Пореметувањата се предизвикани од океанската плима, ветрови, варијации во соленоста и температурата, во интервал од  $\pm 2 m$ .”

Од наведените дефиниции може да се заклучи дека геоидот претставува основа за дефинирање на висината на точките од физичката површина на Земјата. Тој претставува најточната апроксимација на реалната површина од Земјата, заедно со сите нејзини нерегуларности предизвикани од внатрешните маси.

Геоидот заедно со физичката површина на Земјата и референтниот елипсоид ги претставуваат трите основни површини потребни за точно дефинирање на позициите на предметните точки.

Причините зошто трите површини се важни:

- Физичка површина на Земјата – површината каде се вршат теренските мерења;
- Референтниот елипсоид – произволно избран елипсоид кој математички ја дефинира Земјата;
- Геоид – површина која најдобро ја прикажува Земјата.

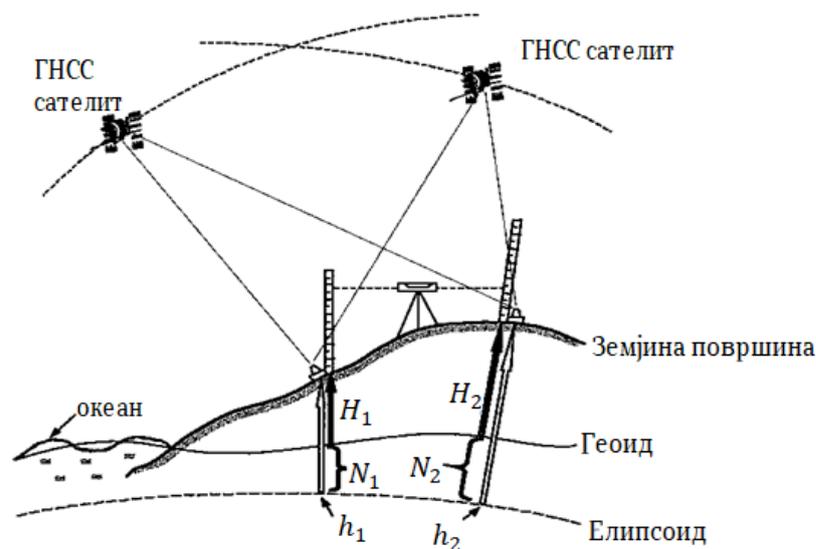
Во својата основа, геоидот е потенцијална површина, која во својата најдобра апроксимација претставува гравиметриски геоид. Неговото дефинирање е важно, бидејќи има повеќе инженерски и научни примени:

- Референтна површина за изведување на геометриски нивелман;
- Трансформирање на елипсоидните висини во ортометриски, физички важни висини;
- Вертикален датум за ортометриски висини;
- Унификација на локалните и регионалните висински датуми;
- Проучување на Земјината внатрешност и океаните.

Најзначајната примена на геоидот од геодетски аспект е во претворањето на елипсоидните висини во ортометриски висини. Елипсоидните висини се висините на предметните точки мерени по нормалата во однос на референтниот елипсоид. Ортометриските висини се висините на точките од физичката површина на Земјата мерени по вертикалата во однос на геоидот. Елипсоидните висини се добиваат со помош на ГНСС позиционирање, додека пак ортометриските висини по пат на геометриски нивелман. Ако за една точка се познати и двете висини (елипсоидната и ортометриската), тогаш може да се пресмета геоидната ундулација, како големина со која се дефинира геоидот. Изразот за пресметка на геоидна ундулација е (4.1):

$$h = H + N \quad (4.1)$$

каде  $h$  е елипсоидната висина,  $H$  е ортометриската висина и  $N$  претставува геоидната ундулација. Постапката за определување на гравиметрискиот геоид се нарекува ГНСС-нивелман, бидејќи за иста точка се вршат сателитски позиционирања, нивелмански мерења и гравиметриски мерења.



Слика 4.1 Определување на висинска разлика со користење на ГНСС-нивелман (Johannessen, 1999)

Целта на докторскиот труд е доволно точно да се определат повеќе гравиметриски модели на геоид, преку различни методи. Користењето на геоид би значело замена на класичното нивелирање и намалување на времетраењето за добивање на ортометриски висини. Тоа се покажува најзначајно во планинските предели, каде геометрискиот нивелман не е ефикасен.

Суштински ако се познати вредностите за елипсоидните висини и геоидните ундулации, тогаш може да се пресмета и висинската разлика  $\Delta H = (h_1 - N_1) - (h_2 - N_2)$  Слика 4.1.

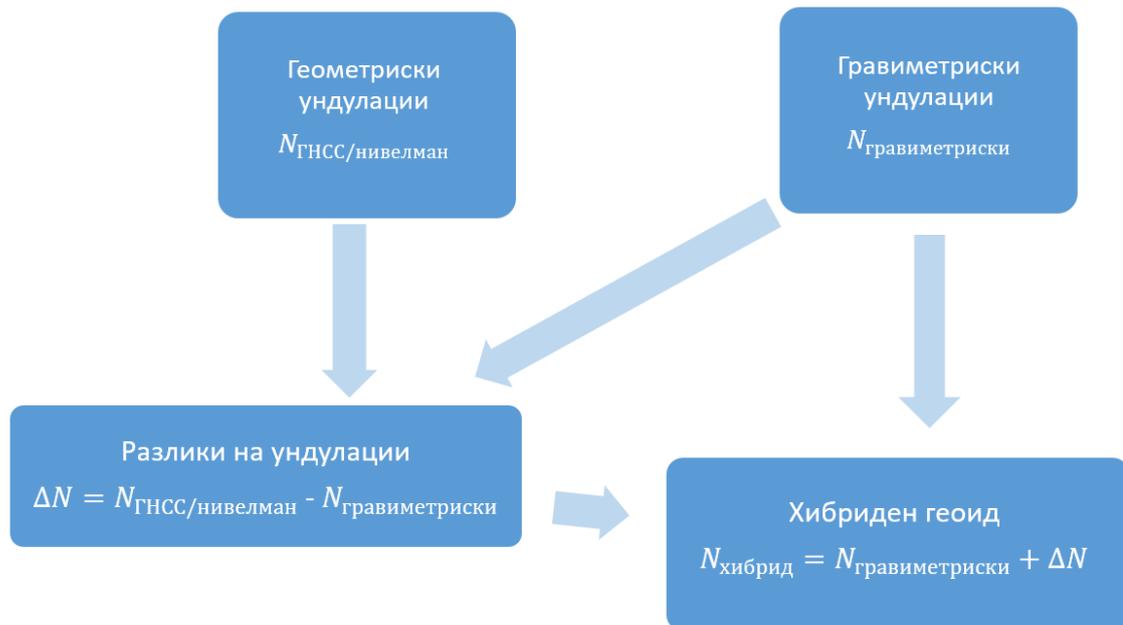
Неразделив дел од сите геодетски мерења се грешките, случајни и систематски. Таков е и случајот со сите влезни податоци (ГНСС, нивелмански, гравиметриски). Дефинирањето на гравиметриски модел на геоид е придружено со постојани статички пресметки на грешките на податоците, интерполација на податоците (аномалии на Земјината тежа) и оцена на дефинитивните модели со цел избор на тој што е карактеризиран со најмала грешка. Овие постапки ќе бидат практично изведени во рамки на поглавјата 6 и 7.

Во рамки на пресметките, централно место имаат изразите (2.34) за пресметка на пореметувачкиот потенцијал  $T$  кој претставува Стоксовото решение за (2.33). Слично со примена на (2.34) во равенката (2.35) се овозможува пресметка на геоидните ундулации  $N$ . Со модификација на изразот (2.35) во двата методи ( $KTH$  и  $CSH$ ) се овозможува дефинирањето на гравиметриските модели на геоид.

Типовите на геоидни модели кои постојат и се користат, се издвојуваат:

- Геометриски геоид – геоидни ундулации добиени со директна разлика на елипсоидната и ортометриската висина, кои не ја претставуваат вистинската површина на Земјата. Се работи за чисто, геометриски големини кои помагаат во статистичката анализа на гравиметрискиот геоид, со цел добивање на хибридниот геоид.
- Гравиметриски геоид – површина добиена во глобален референтен систем од гравиметриски податоци како решение за третиот граничен површински проблем во геодезијата. Се базира исклучиво на гравиметриски податоци и нема практична примена во вертикален систем базиран на средното морско ниво, бидејќи нема поврзаност со локалната или националната нивелманска мрежа.
- Хибриден геоид – претставува гравиметриски геоид кој е вклопен во локална, национална или регионална нивелманска мрежа (геометриски геоид). Тој претставува трансформациона површина помеѓу елипсоидните и ортометриските висини и е поврзан со одреден вертикален датум. Слично како што националните вертикални датуми се поврзани со средното ниво на морето.

Постапката би одела редоследно: определување на геометриските геоидни ундулации, определување на гравиметриските геоидни ундулации, определување на разликите помеѓу геометрискиот и гравиметрискиот геоид, додавање на разликите на гравиметриските геоидни ундулации и добивање на дефинитивниот, хибриден модел на геоид. Шематски, пресметките се прикажани на Слика 4.2:



Слика 4.2 Дефинирање на хибриден геоид

#### 4.2 Оцена на точност и вклопување на гравиметриски геоид

Со дефинирање на хибриден геоид, гравиметрискиот геоид добива практична примена, односно истиот е врзан за одреден вертикален датум (локален или национален). Сепак, самата пресметка не се одвива со едноставно додавање на пресметаните разлики, туку мора да постои одреден тип на израмнување за отстранување на повеќе влијанија:

- Случајни грешки во елипсоидните, ортометриските или геоидните висини;
- Датумски неконзистентности и систематски грешки во трите типа на податоци (грешки во ундулациите од долгобранови промени, разлики помеѓу гравиметрискиот геоид и референтната површина за вертикалниот датум и сл.);
- Геодинамички ефекти (појава на свлечишта, подигање на средното ниво на морето);
- Теоретски претпоставки во пресметување на ортометриски висини или геоидни ундулации (неправилно моделирање на теренот при определување на геоид, игнорирање на топографијата околу мареографите, опсервирања на мареографите без пресметка на нивните грешки).

Определување на точноста на гравиметрискиот геоид е последната фаза. Голем број на модели ќе бидат пресметани, но само еден ќе се карактеризира со најмала грешка и ќе биде избран како конечен. Референтни податоци за пресметка на точноста се геометриските ундулации, затоа што тие се добиени со независни мерења (ГНСС и нивелман). Како што претходно е објаснето, споредбата се прави помеѓу гравиметриските и геометриските ундулации. Иако двата сета на податоци се придружени со грешки, претпоставката е дека геометриските ундулации се поточни од гравиметриските. Како главна големина со која се врши валидација на моделите и нивна оценка на точност се разликите  $\Delta N$ . Средната квадратна грешка (*STD*) е вредноста која се добива при вклопување на гравиметрискиот модел во локалниот вертикален датум во кој се

дефинирани геометриските ундулации. Како иницијална споредба е директната (*no-fit*) со изразот (4.2):

$$h_i = H_i - N_i = A_i^T x + v_i \quad (4.2)$$

каде  $i$  е индексот на предметната точка,  $x$  е вектор матрица на непознати,  $A_i$  е вектор матрица на познати коефициенти и  $v_i$  ги претставува случајните грешки. Параметарскиот дел  $A_i^T x$  би требало да ги сумира сите можни датумски неконзистентности и други систематски грешки во податоците. За тие грешки се воведуваат корекциски површини, односно модели на израмнување (Kotsakis & Sideris, 1999). Во поглед на можните параметарски модели најчеста примена имаат:

- Модел со три параметри

$$A_i^T x = \cos\varphi_i \cos\lambda_i x_1 + \cos\varphi_i \sin\lambda_i x_2 + \sin\varphi_i x_3 \quad (4.3)$$

- Модел со четири параметри

$$A_i^T x = \cos\varphi_i \cos\lambda_i x_1 + \cos\varphi_i \sin\lambda_i x_2 + \sin\varphi_i x_3 + x_4 \quad (4.4)$$

- Модел со пет параметри (Duquenne *et al.*, 1995)

$$A_i^T x = \cos\varphi_i \cos\lambda_i x_1 + \cos\varphi_i \sin\lambda_i x_2 + \sin\varphi_i x_3 + \sin^2\varphi_i x_4 + x_5 \quad (4.5)$$

- Модел со седум параметри

$$A_i^T x = \cos\varphi_i \cos\lambda_i x_1 + \cos\varphi_i \sin\lambda_i x_2 + \sin\varphi_i x_3 + \frac{\cos\varphi_i \sin\varphi_i \cos\lambda_i}{W_i} x_4 + \frac{\cos\varphi_i \sin\varphi_i \sin\lambda_i}{W_i} x_5 + \frac{\sin^2\varphi_i}{W_i} x_6 + x_7 \quad (4.6)$$

Процедурата за валидација на одреден модел на геоид се состои од:

- подготовка на ГНСС-нивелмански точки со дефинирани геодетска ширина, должина, елипсоидна висина, ортометричка висина кои ќе послужат како контролна датотека која го дефинира локалниот вертикален датум;
- интерполирање на вредностите за гравиметриските геоидни ундулации, чии GRID вредности на одредено растојание (лачна секунда или лачен степен) ги имаме определено со еден од двата методи (KTH или CSH);
- имплементирање на методата на најмали квадрати со одбраниот параметарски модел за определување на векторот на непознати ( $x$ );
- дефинирање на разликите на геоидните ундулации од гравиметрискиот модел кои кореспондираат на геометриските ундулации на предметните ГНСС-нивелмански точки;
- статистички вредности (оцена на точност) преку средната квадратна грешка на разликите од геоидните ундулации;

- избор на модел кој генерира најмала грешка и вклопување на истиот во рамки на локалниот датум и добивање на хибриден модел на геоид.

Редоследно, постапката е прикажана на Слика 4.3:



Слика 4.3 Постапка за оцена на точност на гравиметриски геоид

#### 4.3 Податоци за определување на геоид

Податоците потребни за дефинирање на еден геоид не се еднозначно определени. Тие се карактеризираат со разнородност во поглед на начинот на аквизиција и нивната точност, како и во придонесот кој го имаат во дефинирањето на геоидните ундулации. Податоци кои се потребни за да пресметаме еден модел на геоид се:

- Глобални геопотенцијални модели (ГГМ) кои се добиваат преку орбитирачки сателити, со алтиметриски и терестрички мерења. Тие се дистрибуираат до корисниците во форма на сферични хармониски коефициенти со соодветните квадратни грешки. Овие модели ги дефинираат долгобрановите варијации во полето на Земјина тежа. Нивното влијание во дефинитивните геоидни ундулации е во ранг на метри. Одговорни за архивирање на овие модели е ICGEM (Интернационалниот центар за глобални Земјени модели).
- Дигитални теренски модел (ДЕМ) ги дефинираат топографските карактеристики на теренот каде се пресметува геоидот. Овие модели се добиваат преку фотограметриски, LiDAR (Light Detection and Ranging) или SAR (Synthetic Aperature Radar) снимки. Со овие податоци, се добиваат

информации за кратkobрановите варијации на Земјиното поле на тежа. Тие се дистрибуираат во гريد формат со резолуција од 1", 3", 30". Повеќе институции се надлежни за овие модели.

- Терестрички гравиметриски податоци се податоците добиени со гравиметриски премер на Земјиното забрзување. Тие ги претставуваат точкестите промени во гравитациското поле на Земјата. Нивниот премер се прави со апсолутни и релативни гравиметри. Со апсолутните гравиметри се поставуваат основите за гравиметриската мрежа на една држава, а со релативните гравиметри се направени мерењата кои се користат во рамки на овој докторски труд. Оценката на точност и густината на овие мерења се главен фактор кој придонесува до поточен модел на геоидот. Надлежна институција за овие мерења е Агенцијата за катастар на недвижности на Р. Македонија (АКН).
- ГНСС-нивелмански мерења ги претставуваат комбинираниите ГНСС и нивелмански мерења. Суштински, за да може еден геоид да се вклопи во еден локален или национален систем, мора да постојат терестрички висински мерења. Со ГНСС мерењата се дефинираат елипсоидните висини, а со нивелманските мерења се добиваат ортометриските висини. Како што е објаснето во поглавје 4.2, со овие мерења ги добиваме геометриските геоидни ундулации. Слично како и со гравиметриските податоци и за овие надлежна институција е АКН.

#### 4.3.1 Глобални геопотенцијални модели

Во геодезијата, математичката функција која го апроксимира реалниот гравитациски потенцијал во празниот простор надвор од Земјата се нарекува глобален гравитациски модел на полето на Земјина тежа или глобален геопотенцијален модел (ГГМ). Од таков модел можат да се пресметаат чисто гравитациските големини како силата на Земјина тежа, нејзиниот вектор и гравитацискиот потенцијал. Сепак, големините како геоидна ундулација, аномалии на Земјина тежа и пореметувачкиот потенцијал можат да се пресметаат само доколку постои избран референтен елипсоид (Н. Moritz, 1980). Како што беше нагласено во поглавје 2.1, центрифугалниот потенцијал е аналитичка функција која се пресметува со изразот (2.9), тогаш останува пресметката на гравитацискиот потенцијал кој е хармониска функција во празниот простор надвор од Земјата. Претставувањето на гравитацискиот потенцијал се прави со помош на сферните хармониски функции кои ја задоволуваат Лапласовата равенка (Heiskanen & Moritz, 1967). Затоа гравитацискиот потенцијал  $V$  на Земјата и надвор од неа може да се претстави како сумирање на сферните хармоници со одреден степен и ред преку изразот (4.7):

$$V(\varphi, \lambda, r) = \frac{kM}{r} \sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^n P_{nm}(\sin\varphi)(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda) \quad (4.7)$$

каде  $r, \lambda, \varphi$  се сферни координати на пресметувачката точка (радиус вектор, должина и ширина),  $R$  е сферниот радиус,  $kM$  е производ на Њутновата гравитациска константа со масата на Земјата,  $l$  е степен на сферната функција,  $m$  е ред на сферната функција,  $P_{lm}$  е нормализирана Лежандрова функција,  $C_{lm}$  и  $S_{lm}$  се нормализирани Стоксови хармониски

коэффициенти. Секој ГГМ е дефиниран со производот  $kM$ , радиус  $R$  и коефициентите  $C_{lm}$  и  $S_{lm}$  дефинирани со максималниот степен на експанзија на моделот  $l_{max}$ .

Покрај гравитацискиот потенцијал, важно е и дефинирањето на пореметувачкиот потенцијал  $T$  како разлика на реалниот и нормалниот потенцијал. Неговото дефинирање произлегува од разликата на коефициентите помеѓу реалниот потенцијал  $W$  и нормалниот потенцијал  $U$ . Тие разлики се зададени со релациите:

$$C_{nm}^T = C_{nm}^W - C_{nm}^U \quad (4.8)$$

и

$$S_{nm}^T = S_{nm}^W - S_{nm}^U \quad (4.9)$$

каде  $C_{nm}^T, S_{nm}^T$  се коефициентите на пореметувачкиот потенцијал;  $C_{nm}^W, S_{nm}^W$  на реалниот потенцијал и  $C_{nm}^U, S_{nm}^U$  на нормалниот потенцијал. Согласно коефициентите пореметувачкиот потенцијал од ГГМ е дефиниран со изразот (Barthelmes, 2013):

$$T(\varphi, \lambda, r) = \frac{kM}{r} \sum_{n=0}^{n_{max}} \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n P_{nm}(\sin\varphi)(C_{nm}^T \cos m\lambda + S_{nm}^T \sin m\lambda) \quad (4.10)$$

уште две големини се добиваат од ГГМ потребни во пресметките, а тоа се геоидните ундулации  $N_{GGM}$  и аномалиите на Земјина тежа  $\Delta g_{GGM}$ . Пресметувањата се вршат согласно изразот (4.17) за аномалиите:

$$\Delta g_{GGM}(\varphi, \lambda, r) = \frac{kM}{r^2} \sum_{n=0}^{n_{max}} \left(\frac{R}{r}\right)^n (n-1) \sum_{m=0}^n P_{nm}(\sin\varphi)(C_{nm}^T \cos m\lambda + S_{nm}^T \sin m\lambda) \quad (4.11)$$

и

$$N_{GGM} = \frac{T - 2\pi k\rho H^2}{\gamma} \quad (4.12)$$

За пресметување на геоидните ундулации потребен е топографски модел со дефинирани ортометриски висини  $H$ . Вообичаено, топографските модели се зададени во однос на референтниот елипсоид во GRID формат со поголема резолуција ( $1' \times 1'$ ) отколку ГГМ моделите. Во најновите ГГМ, се користи моделот ETOPO1 ( $1' \times 1'$ ) за дефинирање на топографијата. За пресметка на висините, топографските модели се трансформираат во површински сферни хармоници дефинирани со изразот:

$$H(\varphi, \lambda) = R \sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_{m=0}^n (C_{nm}^{topo} \cos m\lambda + S_{nm}^{topo} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin\varphi) \quad (4.13)$$

Првично, се решаваат равенките (4.11) и (4.13) за добивање на аномалиите и ортометриските висини од сферните хармоници, па на крај се применуваат во равенката (4.12) за добивање на геоидните ундулации.

Поголем степен на експанзија, значи и поголема резолуција на моделот. Сепак, колку е подетален моделот, толку се и поголеми можностите за грешки во сферните коефициенти. Затоа секој модел пред да се искористи за одредено подрачје (локално или национално) треба да се валидира во поглед на неговите карактеристики. Таа валидација се прави со помош на геоидните ундулации и гравитациските аномалии добиени од ГГМ во однос на терестричките податоци. Подетално, обработките ќе бидат објаснети во поглавје 5.

Најважниот исчекор во историјата на дефинирање на ГГМ претставувало лансирањето на првиот вештачки сателит. Веќе во 1958 година, кратко после лансирање на сателитот Спутник 2 во ноември, 1957 година, коефициентот  $C_{2,0}$  можел да биде пресметан со доволно добра точност (Merson & King-Hele, 1958). Во следните децении со лансирање на повеќе сателити, се развиле можности за дефинирање на повеќе ГГМ.

Принципот на функционирање е дека орбитата на сателит кој лета околу сферно тело со хомогени маси би била Кеплерова елипса. Во првата претпоставка, Земјата претставува сфера. Сепак, Земјата има сплеснување на половите и масите во нејзината внатрешност се хетерогено распоредени. Тоа предизвикува гравитациско поле со елипсоидна форма на екипотенцијална површина која има испакнувања и вдлабнатини, каква што и всушност е Земјата. Затоа, реалните орбити не се елипси. Девијациите во орбитите се нарекуваат пертурбации и се користат за дефинирање на сплеснатоста. Со овој метод, воедно сателитот претставува и сензор и орбитата мора точно да биде определена. За подобрување на гравитациските модели, сателитските орбити се мерени со ласери, преку вградување на рефлектометри на самите сателити, односно таканаречените тројни призми. Најзначајни сателити за оваа намена се *Starlette* (1975 г.) и *LAGEOS* (1976 г.).

За пресметка на ГГМ пред појавата на компјутерската технологија била користена методата на Каула (Kaula, 1966) за линеарно, аналитичко пресметување на поместувањата на орбитите. Тој ги дефинирал тие изместувања како функција од сферните хармониски коефициенти. Во денешно време, за дефинирање на параметрите на еден модел се користат податоци од орбитите со нумеричка интеграција преку користење на приближен модел. Параметрите можат итеративно да бидат подобрани преку споредби на пресметаните и опсервираните орбити.

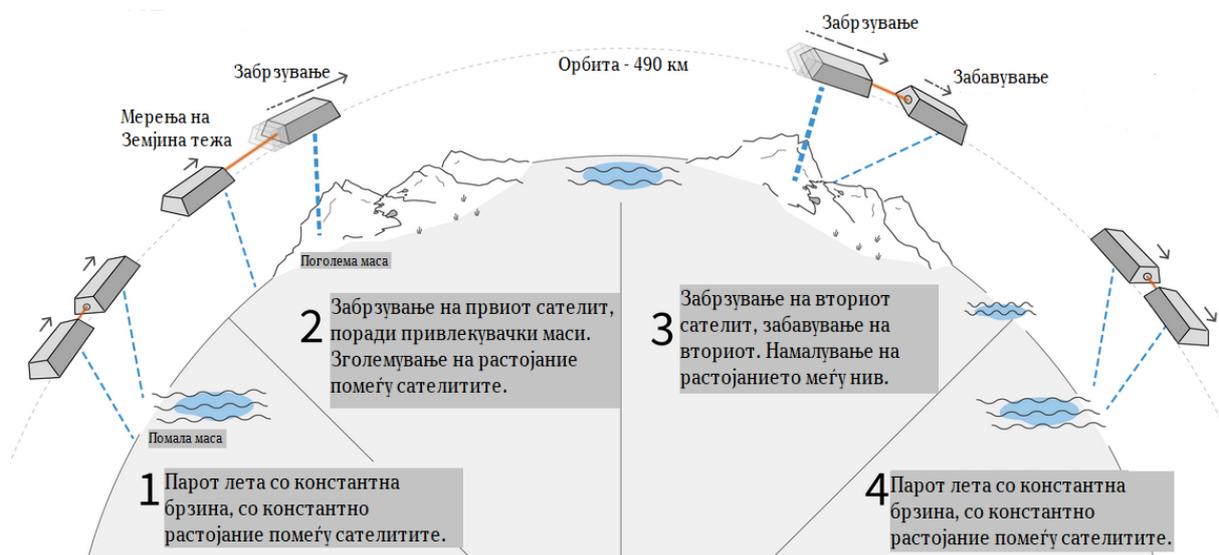
Најзначен чекор во рамки на унапредување на ГГМ се три сателитски миси:

- *CHAMP* (*CHALLENGING Minisatellite Payload*) од 2000 до 2010 година;
- *GRACE* (*Gravity Recovery and Climate Experiment*) од 2002 до 2017 година;
- *GOCE* (*Gravity Field and Steady-State Ocean Explorer*) од 2009 до 2013 година.

Како и претходниците, *CHAMP* мисијата го одредувала гравитациското поле со помош на мерења на орбитата. Сепак, две работи биле новост: орбитата била мерена постојано и прецизно со сателити од ГНСС констелациите, како и три-осен акцелерометар позициониран во центарот на масата на сателитот. Тоа овозможило следење на силите кои влијаеле на површината од сателитот во однос на гравитациските сили. Тоа значело следење на сателитите во таканаречена високо-ниска конфигурација (*high-low*).

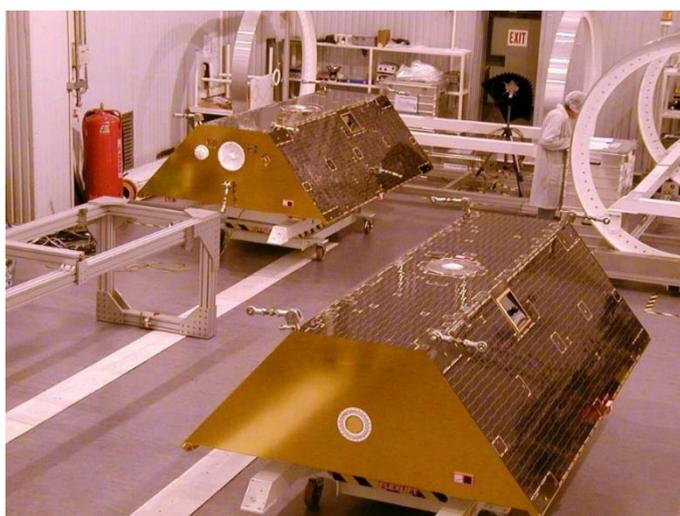
*GRACE* мисијата претставувала мисија со два сателити (“близнаци”) кои биле опремени со ГНСС приемници и акцелерометри за следење на орбитите и мерење на негравитациските ефекти. Исто така, посебен микробранов систем ги мерел промените

во растојанието на тандЕМот сателити доста точно, кој давал информации и за гравитациското поле. Тоа е комбинација на високо-ниска со ниска-ниска конфигурација (low-low). “Близнаците” сателити биле лансирани во 2002 година. Нивната мисија траела 15 години, се до 2017 година, кога се започнува мисијата *GRACE FO* (Follow-On). Начинот на функционирање на овој пар сателити е прикажан на Слика 4.4 (GFZ, 2025b):



Слика 4.4 Приказ на *GRACE* принцип на мерење

Оваа мисија е извршена при соработка на Американската вселенска агенција (*NASA*) и Германската вселенска агенција (*DLR*). Терестричката станица за следење на овие сателити е финансирана од страна на Германскиот центар за истражување за геонауки (*GFZ*) и Европската вселенска агенција (*ESA*) (*NASA*, 2025). На Слика 4.5 се прикажани парот сателити од мисијата пред нивното лансирање во лабораторија на *DLR* (*JPL*, 2025):



Слика 4.5 *GRACE* сателити пред лансирање

Со *GRACE* мисијата, за првпат, се добило глобално покривање на секои 30 дена од еден извор. Своевремено, со оваа мисија, мерењата во полето на Земјината тежа биле поточни од било кој друг инструмент. Практично, постојано се подобрувале податоците

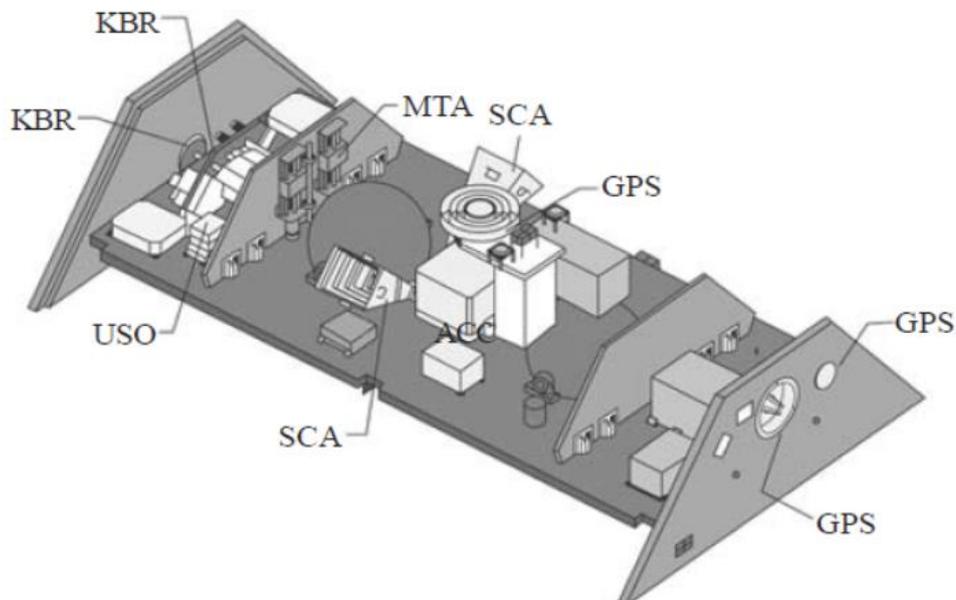
кои се добивале, со што најважниот податок. Со тоа и дефинирањето на геоидот им овозможило на научниците, да добијат што е можно поточни податоци. Со подетални модели на геоид, така имало и зголемување на точностите во сателитската алтиметрија, SAR интерферометријата, како и ДЕМ кои покирале големи копнени и ледени површини. Овие техники овозможиле подобрувања и во апликациите во хидрологија, геологија, океанографија (NASA, 2003):

- мерење на плитки и длабоки океански струења;
- мерење на промени во масите на поларните врвови;
- мерење на промени во водните ресурси на копното;
- промена на морското ниво поради промени во температурите во океаните и водните маси;
- разбирање на атмосферско-океанските размени на маси;
- разбирање на силите кои го генерираат Земјеното геомагнетско поле;
- разбирање на внатрешните Земјени сили кои ги поместуваат тектонските плочи и резултираат со земјотреси и вулкански ерупции.

Табела 4.1 Параметри за орбита на *GRACE* сателити

Тип на орбита	Циркуларна, приближно поларна
Висина на орбита	485 км на лансирање 447 км од 29 март 2012 г. 382 км во септември 2015 г.
Агол на инклинација	89°

На Слика 4.6 се прикажани внатрешните компоненти на *GRACE* сателитите:



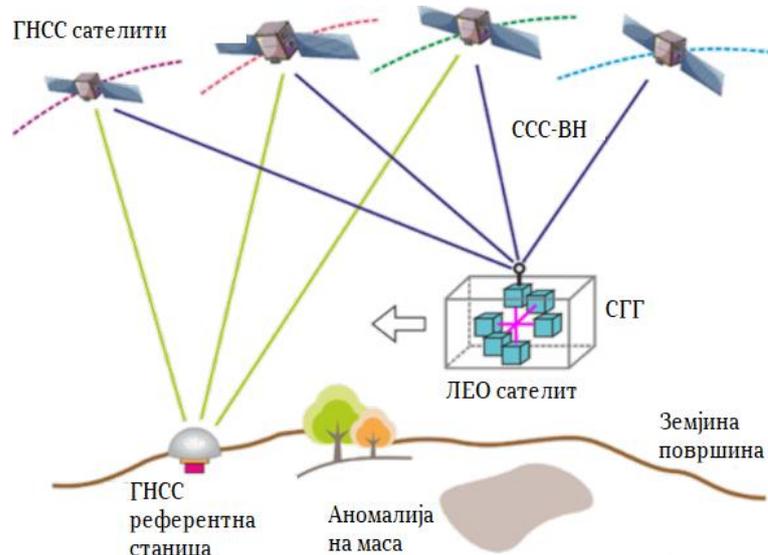
Слика 4.6 Внатрешни компоненти на *GRACE* сателит (NASA, 2003)

Во Табела 4.2 се прикажани дел од параметрите на инструментот со објаснување за нивната улога, кои графички се дефинирани со Слика 4.6:

Табела 4.2 Параметри на GRACE инструмент (ESA, 2025c)

K-band систем за растојание (KBR)	Прецизно следење на растојанието помеѓу двага сателити кое е потребно за определување на флукуации во Земјината тежа
Ултра стабилен осцилатор (USO)	Овозможува фреквенции за KBR системот
SuperSTAR акцелерометри (ACC)	Прецизно мерење на негравитациските забрзувања кои влијаат на сателитите
Star Камера (SCA)	Прецизно определување на ориентацијата на сателитите преку нивно следење во однос на позицијата на ѕвездите
Сензор за следење на Земја и Сонце (CES)	Овозможува омнидирекционално, робустно, грубо следење на Земјата и Сонцето
Центар за маса (MTA)	Сензор за мерење на оддалеченоста помеѓу центарот на маса на сателитот и масата отпорна на забрзување и го прилагодува центарот на маса по потреба за време на летот
BlackJack GPS приемник и инструмент процесирачка единица (GPS)	Дигитално сигнално процесирање преку мерење на промени во растојанието релативно на ГПС сателитската констелација

Со мисијата **GOCE**, за првпат се поставени градиометри на сателит за добивање на информации околу гравитациското поле на Земјата. Орбитата на **GOCE** била определена преку високо-ниска конфигурација, слично како кај **CHAMP**. Мерењата на градиометрите ги даваат промените во потенцијалот и истите се доста сензитивни на пократки бранови должини од гравитациското поле (Barthelmes, 2018).



Слика 4.7 Приказ на GOCE мерење

На Слика 4.7 е прикажан принципот на мерење со **GOCE** сателитот (GGOS, 2025). Како што беше посочено, со оглед на градиометрите во самиот сателит, принципот на мерење е во однос на SGG (**SGG** – **Satellite Gravity Gradiometry**). Разликите на забрзувањата во трите правци се мерат директно со LEO (**LEO** – **Low Earth Orbiting**) сателит. Важна предност е

фактот дека негравитациските забрзувања се исти за мерењата во внатрешноста на сателитот и исчезнуваат со диференцирање.

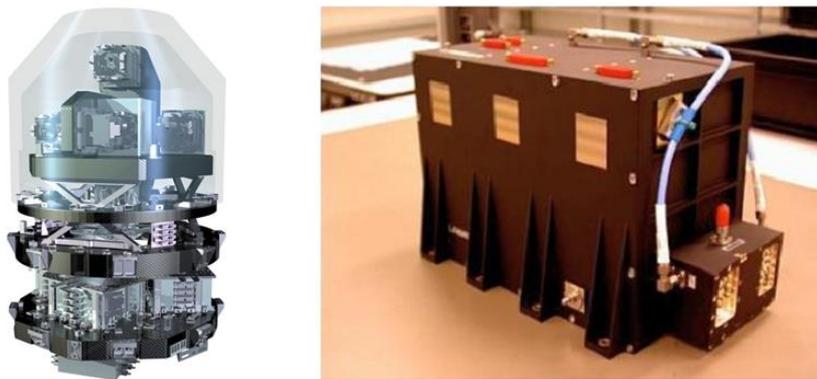
Целите на оваа мисија се базирани на можностите со гравиметрискиот градиометер да се измерат варијациите во полето на Земјина тежа и да се добие детален глобален модел на геоид. Тој модел би служел за повеќе мултидисциплинарни научни цели (ESA, 2025b):

- да се овозможи ново разбирање на физичките карактеристики на Земјината внатрешност вклучувајќи ја геодинамиката поврзана со литосферата и Земјината обвивка;
- прецизно определување на морскиот геоид, кој е потребен заедно со сателитската алтиметрија за дефинирање на апсолутните океански струења;
- подобар висински референтен систем за датумско поврзување, што би служело како референтна површина за проучување на топографските процеси, како еволуција на ледените прекривки и копното;
- пресметување на дебелината на поларните ледени прекривки преку комбинација на карпестата топографија добиена од градиометрите и површинската топографија на ледените прекривки од алтиметриски мерења.

Сателитот од *GOCE* мисијата е опремен со електростатички градиометри (*EGG*) и инструменти за следење на сателитите (*SSTI*).

*EGG* е триосен дијагонал градиометер, базиран на три пара електростатички акцелерометри, Слика 4.8 (лево). Со помош на мерењата на градиентот, се дефинира Земјениот геоид со високо ниво на детали (ESA, 2025a)

Градиометрите ја мерат промената на векторот на Земјина тежа во трите насоки со што се дефинира “тензорот на гравитацискиот градиент” (*GGT*). Практично, целта на оваа мисија била со *EGG* да се измерат трите компоненти на *GGT*. Разликите помеѓу Земјиното забрзување измерено со секој пар се искористени за дефинирање на градиентот.



Слика 4.8 *EGG* градиометар (лево) и *SSTI* инструмент (десно)

На Слика 4.8 (десно) е прикажан инструментот *SSTI* (*Satellite to Satellite Tracking Instrument*) составен од напреден, двофреквентен, 12 каналски *GPS* приемник и *L-band* антена. Тој бил способен за симултано примање сигнали од 12 сателити во *GPS* констелацијата (ESA, 2025d). Овој инструмент овозможувал на фреквенција од 1 Hz, псевдорастојанија и фазни мерења на две *GPS* фреквенција, како и решенија за орбитите во реално време.

Табела 4.3 Параметри за орбита на *GOCE*

Тип на орбита	Хелионсинхрона (сателитот минува над истите делови секогаш во приближно исто локално Сончево време)
Висина на орбита	295 км на лансирање
	270 км после 45 дена
	235 км во ноември 2012 г.
	229 км во мај 2013 г.
Агол на инклинација	96.7°

Пред појавата на овие сателитски мисии, пресметката на *ГГМ* претставувало долг процес за кој било потребни повеќегодишни мерења. После нивната појава, одредувањето било сведено на опсервации кои траеле пократко, една недела или еден месец. Тоа е и причина зошто пресметките на *ГГМ* во денешни услови, не се само од бенефит за геодетите, туку и за другите Земјени науки (океанографија, хидрологија, глациологија, сеизмологија, климатологија, метеорологија и сл.) (Barthelmes, 2018).

*ГГМ* се поделени на сателитски и комбинирани модели. Со сателитските модели се претставени податоците добиени исклучиво со сателитски мерења. Комбинираните модели се добиени преку терестрички гравиметриски мерења над копното и алтиметриски мерења на средното морско ниво заедно со сателитските мерења. Просторната резолуција на сателитските модели е помала, бидејќи со оддалечување од Земјата, кратkobрановите должини (високофреквентните сигнали) ослабнуваат. Тоа значи дека орбитите не можат да бидат ниски (280-250 км за *GOCE*). Од друга страна, точноста и просторната резолуција е подеднаква на целата Земја, бидејќи е независна од други фактори. Кај комбинираните модели, влијанија имаат алтиметриските мерења на морското ниво и грешките кои се прават во терестричките мерења (Barthelmes, 2018).

Сателитските модели кои се добиваат од *GOCE* мисијата каде мерењата се придружени со градиометриските мерења се со најголема просторна резолуција. Нивните хармониски коефициенти се пресметани до максимален степен и ред од 250 до 300, што кореспондира до прикажување на издигнувања и спуштања приближно до 100-80 км. Од друга страна, деталите во комбинираните модели се доста поголеми. Нивните модели достигнуваат степен и ред од 2000 и просторна резолуција од околу 10 км. Сепак, во пракса, кај овие модели тоа ниво на детали се достигнува во регионите каде има густы и точни терестрички гравиметриски податоци.

Користените модели се прикажани во прилог на Табела 4.4:

Табела 4.4 Листа на користени *ГГМ*

Име на модел	Година на издавање	$n_{max}$	Тип на модел	Извор
<i>HUST-GRACE2016s</i>	2016	160	<i>GRACE</i>	(Zhou <i>et al.</i> , 2017)
<i>Tongji-GRACE02k</i>	2018	180	<i>GRACE</i>	(Q. Chen <i>et al.</i> , 2018)
<i>GOSG01S</i>	2018	220	<i>GOCE</i>	(Xinyu Xu <i>et al.</i> , 2017)
<i>GO_CONS_GCF_2_TIM_R6</i>	2019	300	<i>GOCE</i>	(Brockmann <i>et al.</i> , 2019)
<i>GOSG02S</i>	2023	300	<i>GOCE</i>	(Xinyu; Xu <i>et al.</i> , 2023)
<i>ITU_GGC16</i>	2016	280	<i>GRACE+GOCE</i>	(Akyilmaz <i>et al.</i> , 2016)
<i>Tongji-GMMG2021S</i>	2022	300	<i>GRACE+GOCE</i>	(J. Chen <i>et al.</i> , 2022)
<i>WHU-SWPU-GOGR2022S</i>	2023	300	<i>GRACE+GOCE</i>	(Zhao <i>et al.</i> , 2023)

Во продолжение следат кратки објаснувања за секој од користените модели поврзани со начинот на нивно определување, нивните точности, максимални степени на експанзија на хармониските коефициенти:

- *HUST-GRACE2016s* претставува модел добиен со податоци аквизирани со *GRACE* мисијата. Се работи за модел добиен со динамичен пристап, каде се искористени *Level 1B* податоци. Имплементирани се мерења во период од 13 години. Моделот е компетиран до степен и ред 160. Неговиот квалитет и точност се добиени преку оценка на точност во однос на неговите *GRACE* претходници (*AIUB-GRACE03S*, *GGM05S*, *ITG-GRACE2010s*, *ITSG-GRACE2014s*, *Tongji-GRACE01*). Исто така, направена е споредба со вредностите на геодните ундулации добиени со комбинираниот (*GRACE+GOCE*) модел *GOCO05c* (разлики помали од 1 mm пред степен 100 и 1 cm пред степен 138). Во поглед на аномалиите на Земјина тежа и геодните ундулации, вредностите за средната квадратна грешка до степен 140 изнесуваат 0.87 mGal и 4.31 cm, соодветно. Валидација на моделот е направена со ГПС-нивелмански точки во Северна Америка и Холандија, каде стандардната девијација се 46.56 cm и 24.80 cm, соодветно.
- *Tongji-GRACE02k* претставува вториот модел кој е добиен само со податоци од *GRACE* мисијата. Се работи за модел кој е добиен преку имплементација на поразлични стратегии во обработката на податоците. Со тоа е подобрен калибрацискиот модел на акцелерометрите со помалку параметри кој функционира идентично како и кај претходните методи. Тоа довело до постабилни нормални равенки со намалени грешки во високите фреквенции на полето на Земјина тежа. Високо фреквентните грешки се намалени преку моделирање на грешките од забрзување и висина. Со користење на подолги временски серии од *GRACE*, се подобрени геопотенцијалните коефициенти. Првично е добиен моделот *Tongji-GRACE02s*, кој преку примена на правилото на Каула после степен и ред 80, се добива регуларизираниот модел *Tongji-GRACE02k*. Оцената на точност за *Tongji-GRACE02k* е направен во однос на *GRACE* моделите (*GGM05S*, *ITU-GRACE16*, *ITSG-GRACE2014s* и *ITSG-GRACE2014k*) и во однос на ГНС-нивелмански податоци и моделот *DTU13*. После валидирањето на моделите, *Tongji-GRACE02k* постигнува подобрени резултати од 13% во Канада и 23% во Мексико, во однос на *ITSG-GRACE2014k*. Овој модел е компетиран до степен и ред 180.
- *GOSG01S* е модел кој е компетиран до степен и ред 220, добиен со податоци само од *GOCE* мисијата. Кај овој модел, дијагоналните компоненти на тензорот на гравитацискиот градиент се искористени за да се формираат равенките на набљудувањата. Мерењата на забрзувањата во определени точки во насока на трите оски, долж орбитата на сателитот, се искористени за формирање на равенките за набљудувањата до степен-ред 130. Како и кај претходните два модели, потребно е евалуација на моделот со своите претходници (*GOTIM04S*, *GODIRO4S*, *GOSPW04S*, *JYY-GOCE02S*), но исто така е направена компарација и со моделот *EIGEN-6C2* во поглед на спектралните анализи. Исто така, направена е валидација со користење на ГПС-нивелмански податоци во Кина и САД преку користење на моделот *EGM2008*. Во Кина моделот *GOSG01S* резултира со подобри совпаѓања во однос на *EGM2008* моделот. Тоа укажува на фактот дека овој модел дава повеќе информации во пределите што се покриени со поретки терестрички гравиметриски мерења.
- *GO\_CONS\_GCF\_2\_TIM\_R6* претставува шестиот модел кој е реализиран преку имплементирање на нова начин на дополнително процесирање на податоците од *GOCE* мисијата. Суштински, откриено било дека гравитацискиот градиент опсервиран со *GOCE* мисијата можел да биде унапреден преку репроцесирање на

датотеките од целата мисија што било иницирано од страна на ЕСА. Еден дел од активностите бил насочен кон добивање на решенија за полето на Земјина тежа, каде надградените податоци *Level 1b* и *Level 2* се влезни податоци за глобалното гравитациско поле. Со тоа, се втемелува таканаречениот временски пристап при анализирање на мерењата со *GOCE*. Основните карактеристики на овие решенија се дека *GOCE* опсервациите се независни од останатите опсервации на полето на Земјината тежа и акцентот е ставен на стохастичко моделирање на несигурностите во набљудувањата. Овој модел е комплетиран до степен-ред 300.

- *GOSG02S* е третиот искористен модел добиен преку *GOCE* опсервации. Тој претставува модел комплетиран до степен-ред 300 на сферните хармоници. Истиот е дефиниран преку користење на сателитска градиометрија на Земјина тежа (*SSG*) и сателит-со-сателит следење (*SST*). Набљудувањата од *GOCE* се анализирани со методот на најмали квадрати. Моделирањето може да биде поделено во два дела: до степен-ред 130 и од 130 до 300. Во делот до степен 130 се искористени податоци од *SST* преку нормалните равенки, со користење на мерење на забрзувањето во определени точки. Во вториот дел (степен 130-300) се искористени нормалните равенки од *SSG* преку директен метод на најмали квадрати.
- *Tongji-GMMG2021S* претставува комбиниран модел од *GOCE* и *GRACE* мисиите кој е комплетиран до степен-ред 300. Преку опсервациите на гравитацискиот градиент од *GOCE* мисијата се добиваат важни податоци за определување на кратkobрановите варијации на статичкото поле на Земјината тежа. Тука, првично се редуцираат временски зависните сигнали на Земјиното забрзување. Практично на податоците *Level 1b* се ажурирани позадинските модели согласно *IERS2010* конвенцијата. Тука, извршено е комбинирање на нормалните равенки на градиентот од *GOCE* мисијата до степен-ред 300 преку директна метода со репроцесирани податоци *Level 1b* заедно со *Tongji-GRACE02s* нормалните равенки до степен-ред 180 со воведување на ограничувања преку регуларизација на Каула.
- *WHU-SWPU-GOGR2022S* е статички комбиниран модел на гравитациското поле на Земјата до степен-ред 300 на сферните хармоници. Слично како и претходниот модел, извршена е комбинација на нормалните равенки на *GOCE* и *GRACE* мисиите. Слично како и кај *GOSG02S* искористени се сателитската градиометрија и следењето сателит-со-сателит во дефинирање на нормалните равенки до степен 130 (*SSG*) и до степен 300 (*SST*). Моделот *SWPU-GRACE2021S* кој е комплетиран до степен-ред 180 е дефиниран преку динамички пристап со користење на целата *GRACE* база на податоци за сите 15 години активност. Преку комбинирање на двата модела, се дефинира *WHU-SWPU-GOGR2022S*. За валидација е искористен моделот *XGM2019* и ГПС-нивелмански податоци во рамки на фреквенцискиот и просторниот домен, соодветно. Резултатите покажуваат дека точноста на *WHU-SWPU-GOGR2022S* е споредлива со *GO\_CONS\_GCF\_2\_DIR\_R6*, *GO\_CONS\_GCF\_2\_TIM\_R6*, *GO\_CONS\_GCF\_2\_SPW\_R5*, *GOCO06s* и *Tongji-GMMG2021S*, каде разликите во точностите варираат во рамки на милиметри.

Сите опишани модели влегуваат во анализите во рамки на практичниот дел на овој труд. Суштински, без оглед на точностите дефинирани во трудовите изработени во врска со секој од моделите, тие точности не се однесуваат за секој дел од планетата Земја. Анализите за секој модел се регионални и се предуслов пред секое нивно користење на различни региони од Земјата. Затоа, во рамки на практичниот дел ќе бидат направени две

најважни анализи пред било какво користење на ГГМ во практична апликација како што е дефинирање на модели на геоид:

- Спектрална анализа преку меѓусебна споредба на моделите со помош на варирање во степенот на експанзија и како истите се однесуваат во однос на хармониските коефициенти и нивните грешки;
- Просторна анализа преку споредба на секој од моделите поединечно во однос на ГНСС-нивелманските податоци и аномалиите на Земјина тежа, преку различен степен на експанзија.

Сите модели се јавно достапни за превземање од ICGEM, од каде се добиваат во вид на листи на хармониски коефициенти, заедно со нивните грешки во *gfc* формат дефинирани до нивниот максимален степен-ред на експанзија. На Слика 4.9 е прикажан извадок од *gfc* документот за моделот GOSG02S.

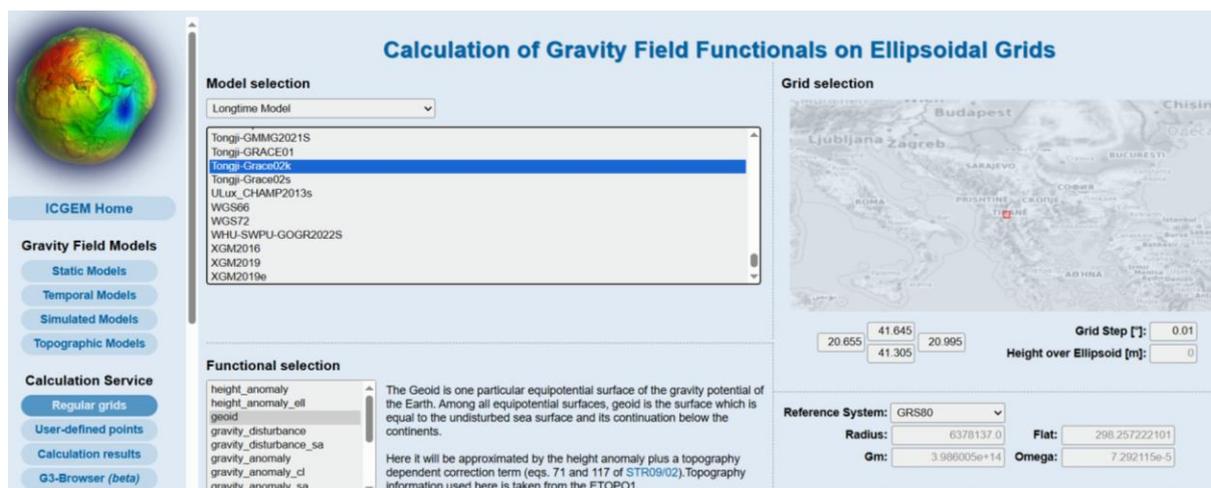
```

begin_of_head =====
product_type          gravity_field
modelname             GOSG02S_
earth_gravity_constant 3.986004415000000E+14 [m3/s2]
radius               6.378136300000000E+06 [m]
max_degree           300
errors               formal
norm                 fully_normalized
tide_system          tide_free

key   L   M           C           S           sigma C           sigma S
end_of_head =====
gfc  0   0   1.000000000000e+00  0.000000000000e+00  0.000000000000e+00  0.000000000000e+00
gfc  1   0   0.000000000000e+00  0.000000000000e+00  0.000000000000e+00  0.000000000000e+00
gfc  1   1   0.000000000000e+00  0.000000000000e+00  0.000000000000e+00  0.000000000000e+00
gfc  2   0  -4.8416539173225e-04  0.000000000000e+00  4.5292623354986e-12  0.000000000000e+00
gfc  2   1  -3.7021046226463e-10  1.4504982321561e-09  4.1422652410852e-12  4.1517683131942e-12
gfc  2   2  2.4394508251426e-06  -1.4003122537764e-06  5.1910785547194e-12  5.2601386825390e-12
gfc  3   0  9.5712697925921e-07  0.000000000000e+00  3.4543900728759e-12  0.000000000000e+00
gfc  3   1  2.0304507301514e-06  2.4823734635601e-07  3.2870957219645e-12  3.2821744965656e-12
gfc  3   2  9.0485203566866e-07  -6.1899424411428e-07  3.3228249464654e-12  3.3266012005503e-12
gfc  3   3  7.2122769820982e-07  1.4144697928175e-06  4.1911997920919e-12  4.1855813589171e-12
gfc  4   0  5.4008992536206e-07  0.000000000000e+00  3.1196545522425e-12  0.000000000000e+00
gfc  4   1  -5.3616585411272e-07  -4.7361463484150e-07  2.7518646049193e-12  2.7598179434928e-12
gfc  4   2  3.5045465636821e-07  6.6247918967310e-07  2.7489182581588e-12  2.7509969031440e-12
gfc  4   3  9.9089657379972e-07  -2.0092985456429e-07  2.8168580426255e-12  2.8184374910901e-12
gfc  4   4  -1.8850090460368e-07  3.0880597552385e-07  3.1539590570220e-12  3.1363848716440e-12
gfc  5   0  6.8706902602687e-08  0.000000000000e+00  2.8766477853643e-12  0.000000000000e+00
gfc  5   1  -6.2912634369313e-08  -9.4308196999798e-08  2.4677819922507e-12  2.4724216798221e-12
gfc  5   2  6.5199182447614e-07  -3.2330130717527e-07  2.43712123350784e-12  2.4401426205140e-12
gfc  5   3  -4.5180125786625e-07  -2.1488903070986e-07  2.5267923609033e-12  2.5295407602060e-12
gfc  5   4  -2.9530884064404e-07  4.9757625829177e-08  2.4776110190130e-12  2.4805423113121e-12
gfc  5   5  1.7482302851892e-07  -6.6932425239076e-07  2.5680276308142e-12  2.8731710978057e-12
    
```

Слика 4.9 Пример за листа со хармониски коефициенти и нивни грешки, модел GOSG02S

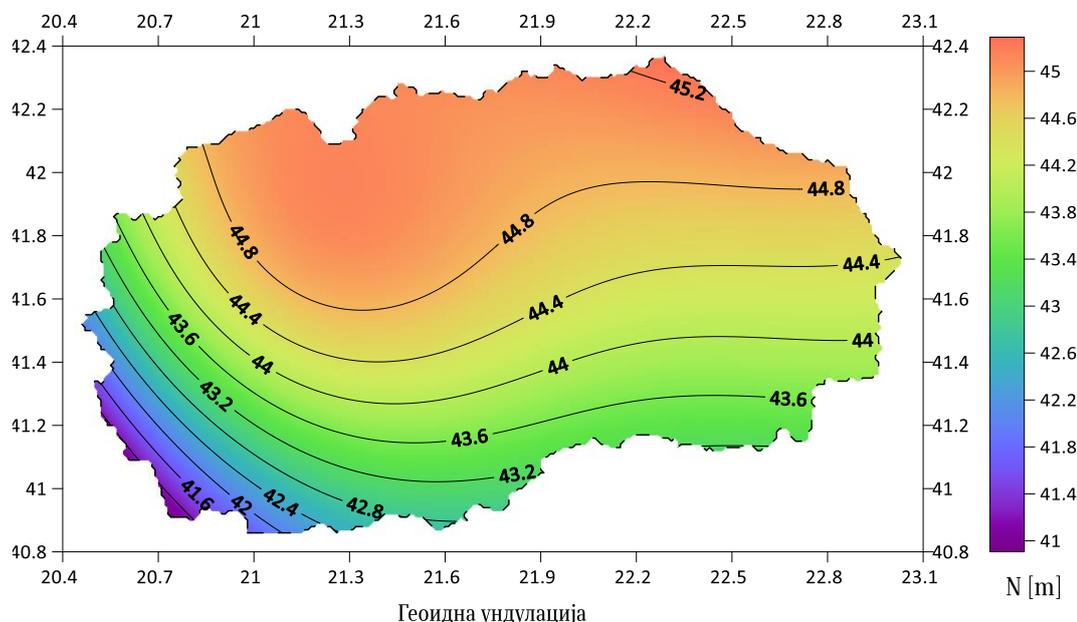
Покрај користењето на листите со хармониски коефициенти, од страна на ICGEM е овозможен и пресметувачки сервис на кој можат да се пресметаат повеќе функции на полето на Земјина тежа за сите статички модели. Пресметувањето може да се врши до различни максимални степени на експанзија, со дефинирање на регионот преку ширина и должина, како и GRID чекорот изразен во степени. Во рамки на овој труд е искористен тој сервис за добивање на гравиметриските геоидни ундулации, аномалии во слободен воздух, непотполните Бугеови аномалии и потполните Бугеови аномалии од ГГМ на различни степени на експанзија  $n_{max} = 10, 30, 50, \dots, 240, 260, 280, 300$ .



Слика 4.10 Пресметувачки сервис на GFZ (GFZ, 2025a)

На Слика 4.10 е прикажан извадок од пресметувачкиот сервис, каде во горниот дел (*Model selection*) се избира ГТМ чии податоци сакаме да ги користиме. Во долниот дел (*Functional selection*) се бира која големина сакаме да ни биде пресметна. На десната страна има два дела: горен дел каде со црвено квадратче се прикажува избраниот регион дефиниран со географска ширина и должина, како и GRID чекорот (*grid step*) и долен дел каде се избира референтниот елипсоид во однос на кој се дефинираат избраните големини (пр. *GRS 80*).

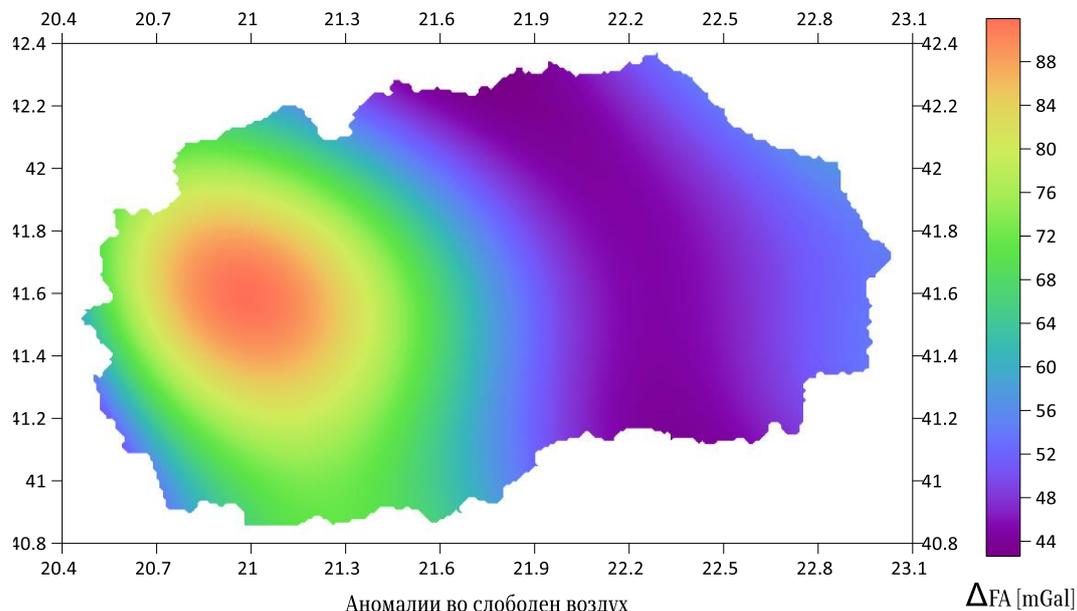
Во следните три слики, се прикажани интерполираните вредности за геоидните ундулации, аномалиите во слободен воздух и непотполните Бугеови аномалии за територијата на Република Македонија, добиени од моделот *GOSG02S* со максимален степен на експанзија  $n_{max} = 300$ .



Слика 4.11 Геоидни ундулации за територија на Република Македонија

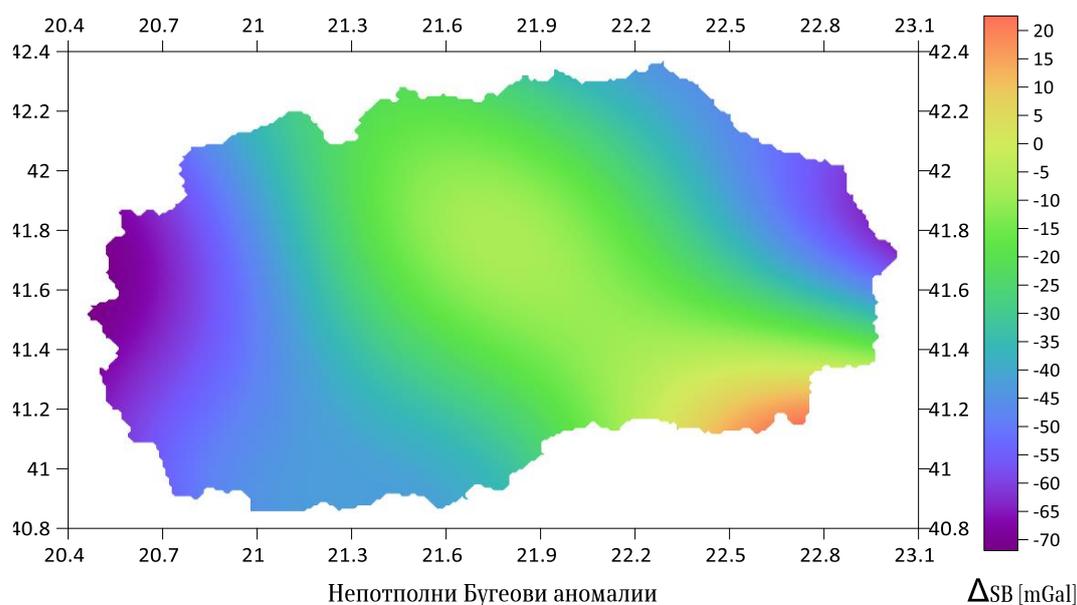
Според Слика 4.11, вредностите на геоидот се движат од 40.8 m до 45.4 m. Моделот се карактеризира со пониски вредности во југозападниот дел на нашата земја. Во

централниот дел, вредностите се движат околу 44 m до 44.8 m, додека максимални вредности достигнува во северниот дел на државата.



Слика 4.12 Аномалии во слободен воздух за територија на Република Македонија

Од Слика 4.12 може да се забележи движење на аномалиите во слободен воздух од 43.5 mGal до 90 mGal. Поголемите вредности се појавуваат во повисоките планински региони, односно во регионот за кој и станува збор кога е определувањето на геоидот во рамки на овој докторски труд. Како што се движиме на исток од Република Македонија, вредностите се намалуваат. Позначителни намалувања има во централниот дел каде вредностите се од 72 mGal до 56 mGal.



Слика 4.13 Непотполни Бугеови аномалии за територија на Р. Македонија

На Слика 4.13 се прикажани непотпните Бугеови аномалии, каде се забележуваат пониски вредности во западниот и источниот дел на државата. Вредностите се движат од

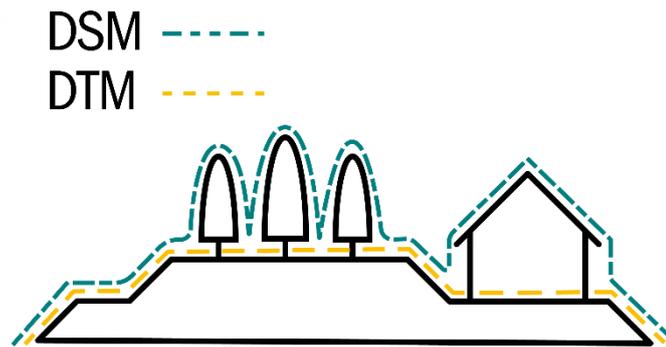
-75 mGal до 25 mGal. Аномалиите имаат вредности блиски до нула од 21° географска должина до 22°30'. Максималните вредности се достигнуваат во југоисточниот дел, во близина на границата со Република Грција.

#### 4.3.2 Дигитални теренски модели

Дигиталните елевациски модели (*ДЕМ*) се вториот тип на податоци потребни за дефинирање на геоидот. Тие во себе ги содржат податоците за кратkobрановите (високо фреквентни) варијации во полето на Земјина тежа. Нивното влијание во определување на геоидните ундулации е со локален карактер, со бранови должини помали од 20 km ( $n_{max} \approx 1000$ ).

Терминот “дигитални елевациски модели” е доста општо користен за опишување на моделите со кои добиваме податоци за топографијата на одредено подрачје. Најчесто употребуван е терминот “*ДЕМ*” во светската литература кога се мисли на топографски снимки добиени со сателитска аквизиција. Сепак, во рамки на тој термин постојат уште два термини дигитален теренски модел (*DTM*) и дигитален површински модел (*digital surface model - DSM*). За подобро разбирање на разликите, ќе бидат објаснети накратко секој од нив (Croneborg *et al.*, 2020):

- Дигитални елевациски модели (*ДЕМ*) во понатамошниот дел на трудот ќе се користи кратенката *ДЕМ*. Со овој термин се дава генерален опис на сите дигитални снимки кои содржат информации за висините (елевациите) на теренот, топографијата и-или батиметријата. Придавката “дигитални” доаѓа од фактот дека најчесто тие се креирани, дистрибуирани и анализирани во дигитален формат. Во себе ги содржат податоците за висините на теренот, со исклучување на сите вештачки креирани објекти од страна на човекот или вегетацијата. Тоа претставува модел во две насоки: моделска претстава теренот базирана на пикселизација и модел кој софтверските алгоритми можат да го анализираат и да дадат информации за теренот.
- Дигиталните теренски модели (*DTM*) претставува термин кој често се поистоветува како синоним за *ДЕМ*, каде теренот ја претставува Земјината површина, а со тоа се поклопува со концептот на *ДЕМ*. *DTM* моделите се подобрени верзии на *ДЕМ*, кои преку дополнителни софтверски процесирања се овозможува подобро претставување на топографијата и истакнатите теренски детали. *ДЕМ* и *DTM* продуктите се користат претежно за мапи на поплави, градско планирање, како и за дефинирање на моделите на геоид, каде се неизбежно составен дел.
- Третиот тип на модели се дигиталните површински модели. Под површина се мисли на најистакнатиот дел во одредена положба на Земјата, односно површината од која се одбива сигналот на радарскиот рефлектометар. Тоа би значело дека површинските модели се креираат така што радарот или радио бранот се одбива од првата површина со која има допир (густа вегетација, згради, куќи). Од друга страна *ДЕМ* ги задржува само информациите за Земјината површина, со цел да се креираат исклучиво висински модели на голата копнена површина.



Слика 4.14 Приказ на разликите помеѓу DSM и DTM

Како што се забележува од Слика 4.14 со жолта линија е обележан моделот *DTM* кој го претставува теренот без дрвата и објектот, додека со зелена линија е прикажан *DSM* кој во предвид ги зема и природната вегетација, заедно со објектот. На местата каде е чисто површинска Земја, двата модели се поклопуваат.

Во рамки на овој докторски труд се искористени четири елевационски модели кои се креирани во различни периоди. Во продолжение ќе бидат накратко објаснети моделите:

- *SRTM (Shuttle Radar Topography Mission)* е теренски модел кој е креиран преку проект реализиран од страна на НАСА, Националната агенција за мапирање на САД, Германската вселенска агенција и Италијанската вселенска агенција. Со мисијата се аквизирани тродимензионални слики на Земјината површина преку радарска интерферометрија, каде две радарски снимки се преклопуваат со цел да се добијат висински информации. Потоа, сликите се трансформираат во глобален модел, кој се протега од 60 степени северна географска ширина до 56 степени јужна географска ширина. Вертикалната точност на моделот е приближно 16 метри со 90 % сигурност. Продуктите од овој модел се јавно достапни и можат да се превземат од интернет страната на Заводот за геологија на Обединетите Американски Држави (USGS, 2025). Најголема примена овој модел има во хидролошки апликации. Моделот е дефиниран со хоризонтален датум *WGS84* и вертикален датум *EGM96*. За овој модел достапните продукти се:

- *Non-void filled* висински податоци кои се процесирани од *C-band* радарски сигнали на интервали од 1 лачна-секунда со помош на лабораторијата на НАСА. Таа верзија е подобрена со помош на Националната геопросторна агенција (de Gooijer et al.).

Податоци надвор од САД се претставени во интервали од 3 лачни-секунди со користење на кубична конволуциска техника за јавна дистрибуција.

- *Void-filled* висинските податоци се резултат на дополнително процесирање за подрачјата каде има прекини или недостаток на информации од *non-void filled* податоците. Прекините се случуваат во региони каде иницијалното процесирање не ги задоволува првичните критериуми за квалитет. За да се надминат тие проблеми, *NGA* ги надополнува тие региони со помош на интерполирање.

Форматот во кој можат да се добијат моделите се:

- *DTED (Digital Terrain Elevation Data)* е стандарден формат на карти дистрибуирани од страна на *NGA*. Секој документ или ќелија содржи матрица на висински

вредности распоредени на регуларни хоризонтални интервали кои се мерат во географски координати.

- *BIL* (Band interleaved by line) е бинарен, растерски формат придружен со дополнителен документ кој ги опишува распоредот и форматот на документот.
- *GeoTIFF* (Georeferenced Tagged Image File Format) е tiff формат кој ги содржи географските информации за подрачјето.

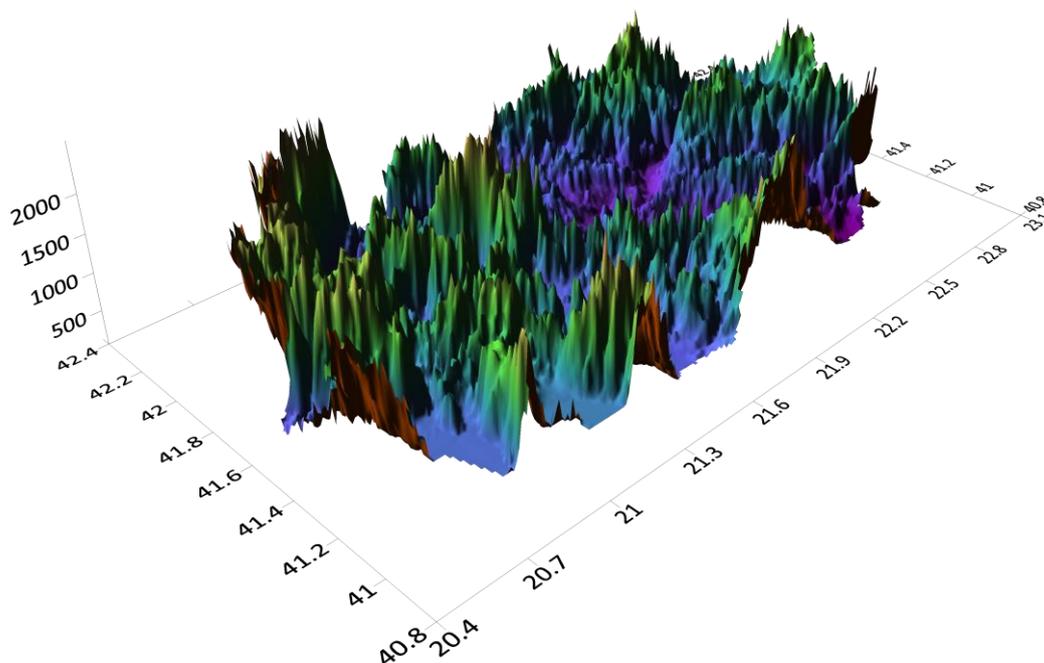
За потребите на овој докторски труд се користи *SRTM 1* кој се карактеризира со резолуција од 1 лачна-секунда ( $\approx 30$  м) и моментално е најпрецизниот модел кој е креиран со оваа мисија.

- *ASTER* (Advanced Space-borne Thermal Emission and Reflection Radiometer) претставува набљудувачки сензор кој е поставен на сателитот *Terra* во декември, 1999 година. Овој сензор е достигнување на соработката помеѓу НАСА и Јапонското министерство за економија, трговија и индустрија (*METI*). Моделот се генерира од две (пар) стерео снимки направени со надир и обратните агли врз исто подрачје во 2009 година. Оваа стратегија овозможила добивање на *ДЕМ* со подобрена точност поради поголемиот број на снимки. Моделот ја покрива Земјината површина од 83 степени северна географска ширина до 83 степени јужна географска ширина, дури и во тешко пристапните планински региони. Превземањето на податоци е овозможено во tiff формат кој е геореференциран со  $1^\circ \times 1^\circ$  полиња со резолуција од 1 лачна-секунда. На местата каде има водни површини (море или океани) вредностите се 0 или -9999 метри во податоците. Тоа не е толку значајно за овој докторски труд со оглед на фактот дека нема таков предел во предметното подрачје. Деталните податоци и спецификации, како и превземањето на моделите можат да се направат преку интернет страницата на Јапонскиот вселенски системски сервер (*ASTER*, 2025). Вертикалната точност изнесува од 10 до 20 метри. Овој модел се карактеризира со хоризонтален датум *WGS84* и вертикален датум *EGM96*. Најголема примена овој модел има при геоморфолошки испитувања.
- *MERIT* (Multi-Error-Removed Improved Terrain) е продукт на истражувачки тим предводен од професорот Тошихиро Јамазаки од Универзитетот во Токио. Овој модел е со 3 секундна резолуција ( $\approx 90$  м), кој е креиран преку користење на постоечките *SRTM* и *AW3D* модели. Од тие модели се елиминирани грешките предизвикани од повеќе извори (случајни грешки, грешки во рефлексивност на сигналот, грешки при рефлексивност од вегетација) преку користење на повеќе сателитски бази на податоци и техники за филтрирање. Практично грешките во висините од користените модели се одделени од топографските сигнали пред да се извршат анализите. После бришење на грешките, копнените површини каде грешката е  $\pm 2$  м е зголемена од 39% на 58%. Значајни подобрувања се направени во рамничарските предели кои се во близина на реките кои тежнеат кон поплавување на истите. Точноста на висините изнесува од 2 до 5 метри. Овој модел се карактеризира со хоризонтален датум *WGS84* и вертикален датум *EGM96*. Податоците се претставени со полиња  $5^\circ \times 5^\circ$  димензии. Форматот на податоците може да биде *ESRI (Fortran Direct Access Format)* или *GeoTiff*. Најголема примена има при проекти поврзани со заштита на животната средина и хидрологија (Yamazaki et al., 2017).

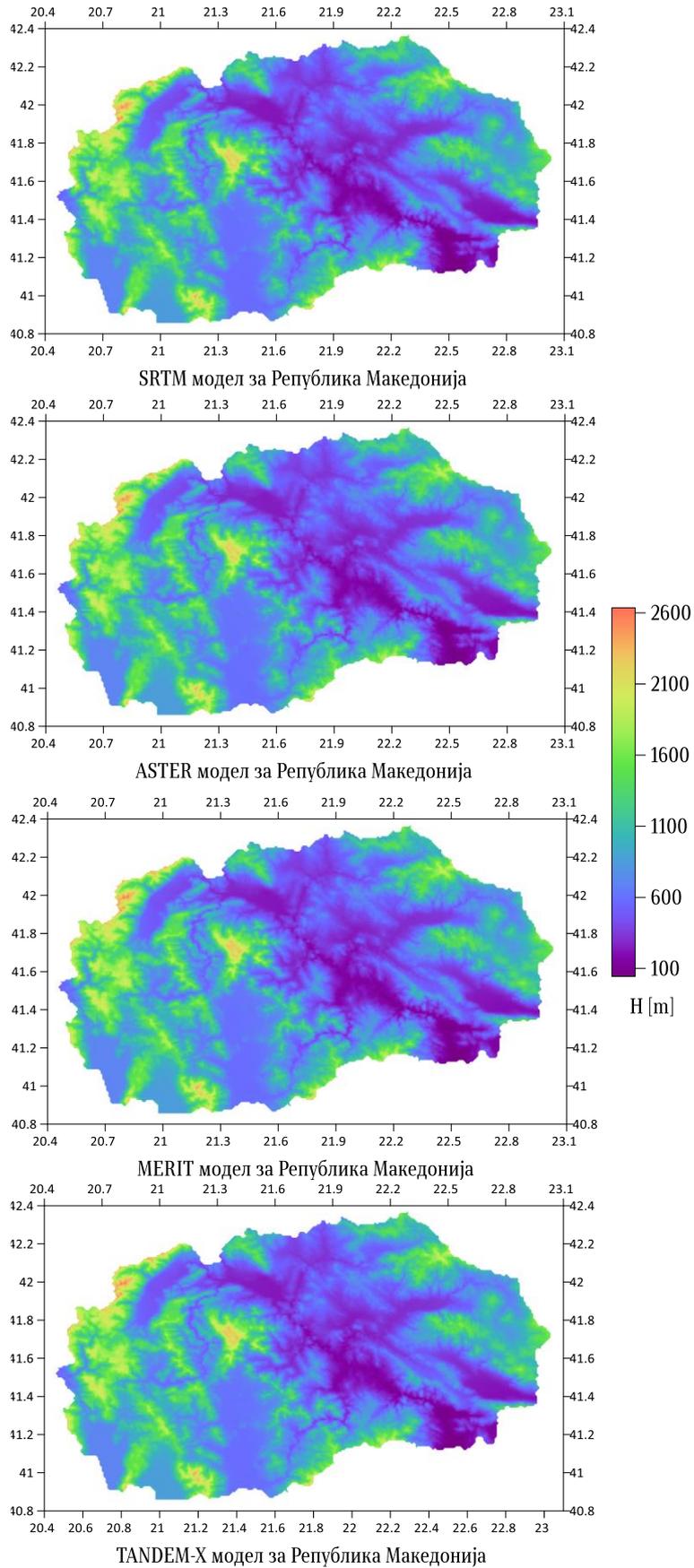
- *TANDEM-X (TerraSAR-X add-on for Digital Elevation Measurements)* е опсервациска радарска мисија која се состои од SAR-интерферометар креиран од два идентични сателити кои летаат блиску еден до друг. Крос-интерферометрија со растојанија од 120 до 500 метра помеѓу нив овозможува прецизни интерферограми на кои не влијаат времените декорелации и атмосферски влијанија. Примарната цел на мисијата е креирање на глобален елевациски дигитален модел што и било постигнато во 2016 година. Апсолутната висинска грешка е во рангот од 1 до 2 метри. Најголемата примена на овој модел е во геологија, океанографија, метеорологија, истражувања на животната средина, картографија. Резолуцијата е 1 лачна секунда ( $\approx 30$  m). Постои и дополнителни верзии со резолуција од 0.4 лачни секунди ( $\approx 12$  m) за кои се потребни посебни дозволи. Моделот се карактеризира со податоци со различни висински системи. Хоризонталниот датум е во WGS84 системот, додека вертикалниот датум може да биде WGS84 (елипсоидни висини) или EGM2008 (геоидни ундулации). Тоа значи дека за да се добијат ортометриските висини, двата модели мораат да се искористат за да се направи разликата помеѓу елипсоидните висини и геоидните ундулации. Превземањето на снимките од моделот можат да се направат преку Центарот за Земјино опсервирање при Германскиот вселенски центар (EOC, 2025).

Табела 4.5 Користени дигитални теренски модели со нивните спецификации

Модел	Резолуција	Точност	Висински датум
SRTM	1" ( $\approx 30$ m)	$\approx 16$ m	EGM96
ASTER	1" ( $\approx 30$ m)	$\approx 10-20$ m	EGM96
MERIT	3" ( $\approx 90$ m)	$\approx 2-5$ m	EGM96
TANDEM-X	1" ( $\approx 30$ m)	$\approx 1-2$ m	WGS84



Слика 4.15 SRTM 3Д приказ за Република Македонија



Слика 4.16 Дигитални теренски модели за Република Македонија

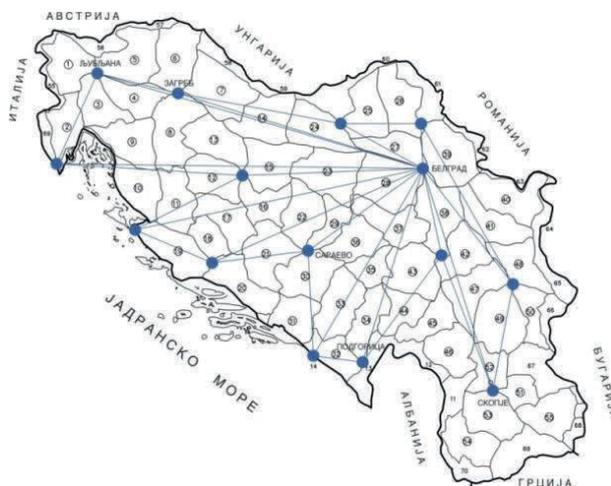
Во рамки на Табела 4.5 Користени дигитални теренски модели со нивните спецификации Табела 4.5 се сумирани спецификациите за сите четири теренски модели кои наоѓаат примена во рамки на докторскиот труд. Суштински разликите се во точностите кои се декларирани за висините во моделите, а исто така и во вертикалниот датум кај моделот *TANDEM-X*. Практично, моделите се дефинирани со геоидниот модел *EGM96* (*SRTM*, *ASTER*, *MERIT*) и геоидот *EGM08* (*TANDEM-X*). Од друга страна, ортометриските висини на предметните точки, се добиваат преку нивелмански мерења кои се извршуваат на различен вертикален датум поврзан со средното ниво на морето. Тоа укажува на датумски разлики помеѓу *ДЕМ* и терестричките мерења, што би претставувало систематска грешка во дефинитивните резултати за моделите на геоид. Оттука, пред користење на секој од *ДЕМ*, ќе биде направена нивна валидација, првично меѓусебна, а потоа и во однос на *ГНСС*-нивелманските точки. Согласно, Слика 4.15 и Слика 4.16, сите четири теренски модели имаат слични вредности, со повисоки вредности во западниот дел од Република Македонија, најмали во централниот, котлински дел (Скопска котлина, продолжувајќи по течението на реката Вардар, се до границата со Република Грција) и повторно со зголемувања во источниот дел на нашата држава. Иако, моделите навидум имаат исти вредности, сепак при локални анализи, како што е определувањето на геоидот, нивните разлики се евидентни. Тие произлегуваат поради начинот на аквизиција на податоци (различни сателити), резолуција, геоиден модел за добивање на ортометриски висини.

#### 4.3.3 Терестрички гравиметриски податоци

Третиот сет на податоци се терестричките аномалии на Земјината тежа. Како што беше опишано во поглавје 3.5, овој тип на податоци се добиваат кога од редуцираните вредности на Земјиното забрзување се одземаат нормалните вредности. Тоа значи дека за добивање на овие податоци мора да имаме теренски мерења на Земјиното забрзување. Мерењата можат да бидат апсолутни или релативни.

Од историски аспект, во рамки на СФРЈ (Социјалистичка Федеративна Република Југославија), а чиј дел била и Република Македонија, работите поврзани со поставување на гравиметриска мрежа биле започнати околу 1951 година од страна на Воено-географскиот институт.

Дефинирањето на мрежата од I ред била со 15 точки во облик на централен систем, со 14 затворени триаголници со централна точка во гравиметриската точка Белград.

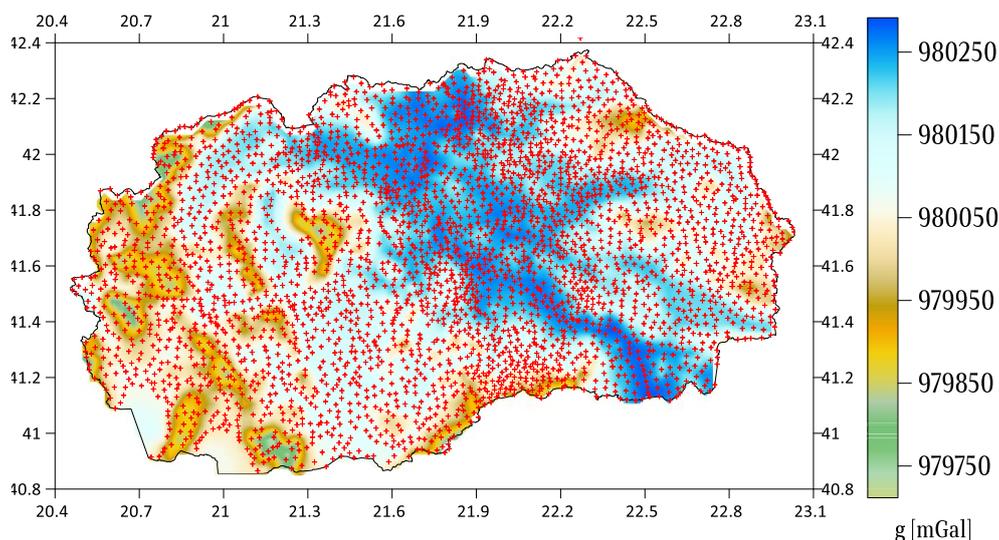


Слика 4.17 Гравиметриска мрежа од I ред на територијата на поранешна Југославија (AREC, 2022)

На Слика 4.17 со сина боја се обележани точките на мрежата од I ред.

Понатаму, биле дефинирани мрежата од II ред и Основната гравиметриска мрежа. За обезбедување на размерот, била дефинирана базата Белград-Скопје, која подоцна била продолжена на север кон Суботица и на југ кон Битола. Мерењата во Основната гравиметриска мрежа биле направени во периодот од 1964 до 1967 година (Srbinoski, 2015).

Оваа мрежа го дефинира гравиметрискиот референтен систем кој се заснова на Меѓународната гравиметриска стандардна мрежа IGSN 71 (International Gravity Standardization Network 1971) (AREC, 2022).



Слика 4.18 Распоред на гравиметриски точки во Република Македонија

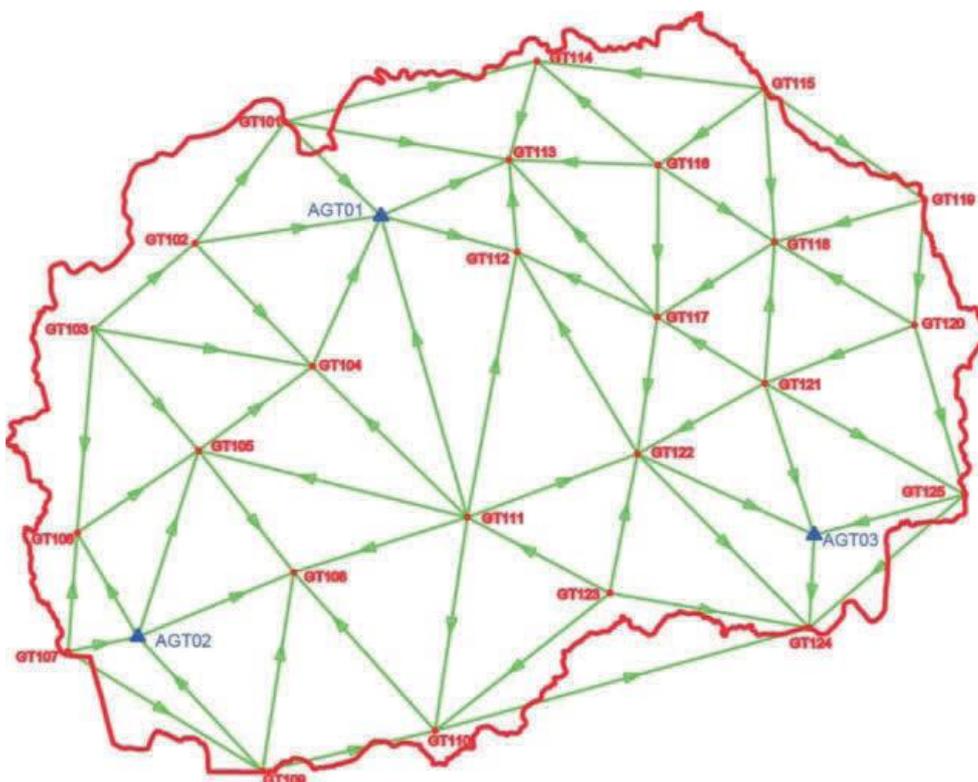
На Слика 4.18 е прикажан распоредот на точките каде е извршен релативен гравиметриски премер во СФРЈ. Се работи за мрежа од 3587 точки кои се распоредени на територијата на нашата држава ( $25\,713\text{ km}^2$ ). Тоа би значело дека точките се со просечна густина од 1 точка на  $7\text{ km}^2$ .

Во поновата историја, кампањи за воспоставување на нови вертикални и гравиметриски системи се изведени почнувајќи во 2010 година. Гравиметриската мрежа е поставена преку стабилизирање на точките од нулти ред (Скопје, Валандово и Охрид). Потоа, следи прогустување со мрежа од прв ред во 2013 година и мрежа од втор ред во 2014 година. Карактеристиките на мрежата се прикажани во Табела 4.6 (Kasapovski *et al.*, 2018):

Табела 4.6 Карактеристики на новата гравиметриска мрежа

Ред на мрежа	Нулти	Прв	Втор
Година на мерења	2010	2013	2014
Број на точки	3	25	2310
Точност	$3\ \mu\text{gal}$	$13\ \mu\text{gal}$	$<60\ \mu\text{gal}$

За точките од прв ред, единаесет од нив се точки од пасивната ГНСС мрежа на Република Македонија. За десет точки се избрани јазолни точки од нивелманската мрежа воспоставена со кампањата НВТЗ за која ќе стане збор во следното поглавје. Исто така, воспоставени се четири нови точки (GT103, GT111, GT113 и GT114). Со тоа се комплетираат 25 точки за првиот ред на гравиметриската мрежа. Позиционите координати на гравиметриските точки се во хоризонталниот датум ETRS89, епоха 1989.0, базиран на GRS80 елипсоидот, додека висините се ортометриски (Gospodinov *et al.*, 2015).



Слика 4.19 Основна гравиметриска мрежа (AREC, 2022)

На Слика 4.19 е прикажана гравиметриската мрежа од нулти ред (3 точки – сино) и прв ред (25 точки – црвено). Новиот систем е поврзан со системот IGSN 71 преку поврзување на вертикалниот референтен систем со EVRS (Европски вертикален референтен систем), преку три врски со Република Бугарија.

#### 4.3.4 Нивелмански податоци

Последните податоци за определување на гравиметриски геоид се ГНСС-нивелманските податоци, односно сателитски и висински мерења на предметните точки. Слично и како кај гравиметриските мрежи, нивелмански основи за определување на ортометрички висини се поставувани неколку пати во историјата на Република Македонија.

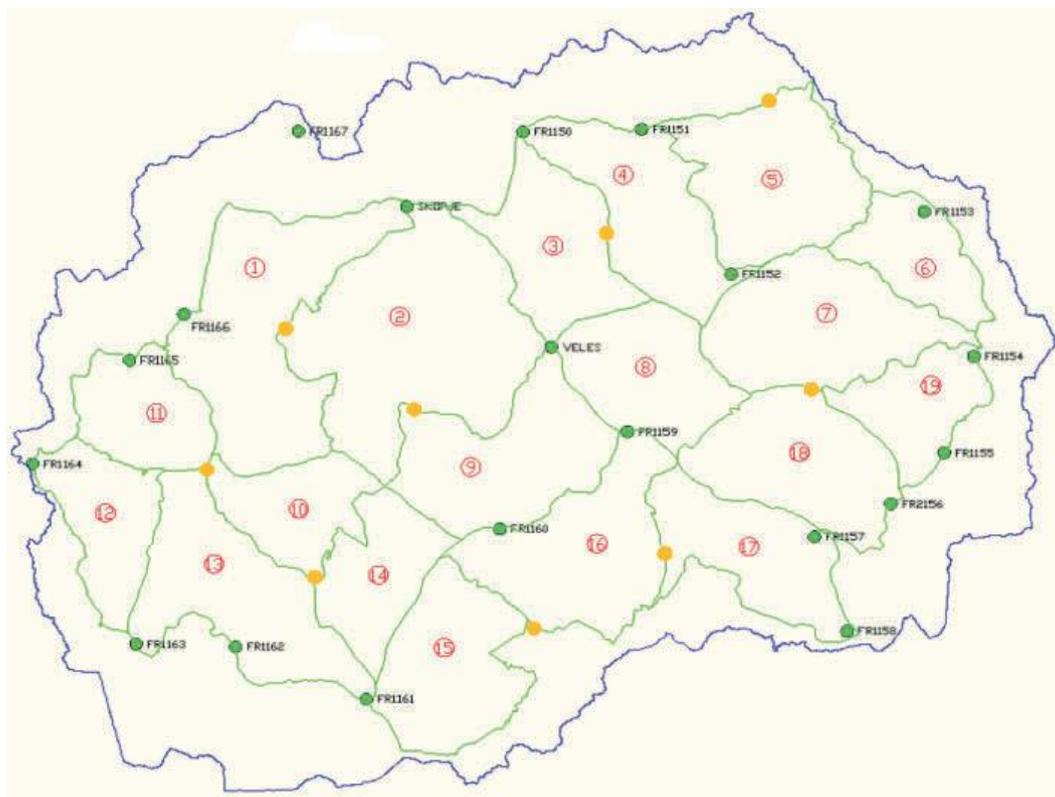
Почетоците започнуваат во рамки на кампањата НВТ1 (нивелман од висока точност 1) кога нашата држава била дел од СФРЈ. Мерењата биле извршени се до 1968 година. Вертикалниот датум бил дефиниран со средното морско ниво на мареографот во Трст (Molo Sartorio), кој бил одреден со едногодишни мерења извршени во текот на 1875 година (AREC, 2022).

Потоа, следи вториот нивелман со висока точност (НВТ2) во периодот од 1970 до 1973 година. Во рамки на тие мерења, територијата на Република Македонија била опфатена со два нивелмански влаци. Тие се протегале по западниот и источниот дел од нашата држава. Нивните должини биле: западен влак (545 km) и источен влак (625 km). Двата влака имале заедничка почетна точка во Урошевац која претставувала фундаментален репер со ознака FR 1144 (Srbinoski, 2015).

Во поскорешниот период, се извршени активности паралелни со оние за воспоставување на нова гравиметриска мрежа, со кои се дефинира и нова вертикална основа за нашата земја. Тоа е кампањата НВТЗ започната во 2010 година која беше спомната во претходното поглавје. Се работи за третиот нивелман од висока точност, со кој се поставуваат основите за новиот вертикален систем за Република Македонија.

Со овој вертикален систем, се извршува поврзување со Обединетата европска нивелманска мрежа - *UELN* и истиот е базиран на *EVR5*, исто како и гравиметрискиот систем. За точките од НВТЗ е одредено користење на положбени координати во *ETRS89* системот, со *GRS 80* елипсоид во однос на кој се дефинирани елипсоидните висини, а референтни површини се геоидот и квазигеоидот. Тоа значи дека за точките се определени ортометриски и нормални висини, како физички висини (AREC, 2022).

НВТЗ мрежата се состои од 1098 нивелмански точки, поврзани со 49 нивелмански влаци и 19 полигони, со додатни 12 влаци за поврзување со соседните земји. Вкупната должина на нивелманските влаци е 2189 км, со просечна должина од 1800 м помеѓу точките. Во рамки на мрежата има 28 фундаментални репери и 31 јазолна точка (Odalovic, 2009), (Kasapovski et al., 2018). Мрежата е прикажана на Слика 4.20.



Слика 4.20 НВТЗ мрежа (AREC, 2022)

Согласно изнесените податоци, со НВТЗ кампањата, паралелно се дефинирани нови нивелмански точки придружени со дефинирани ортометриски висини во однос на средното морско ниво, елипсоидни висини, како и гравиметриски мерења на истите точки, чија положба е унифицирана во однос на *GRS80* елипсоидот, во рамки на *ETRS89* системот. Со тоа овие два системи формираат стабилна основа за анализите кои следат во овој докторски труд.

#### 4.4 Методи за определување на геоид

Во рамки на геодетската пракса, постојат повеќе методи за пресметка на гравиметриски геоид. Сите методи наоѓаат соодветна примена, бидејќи за нивно имплементирање се потребни истите податоци (нивелмански мерења, ГНСС мерења и гравиметриски мерења, ГТМ и ДЕМ). Практично, разликите постојат во две работи:

- соодветна интеграција и математичката манипулација со податоците;
- пристрасноста на еден геодет за тоа која метода ќе ја користи (KTH, CSH, RCR)

Тоа што дава мотив за понатамошна обработка на податоците за дефинирање на нови модели лежи во фактот дека сите методи се карактеризираат со слични оценки на точност, односно со слични грешки при вклопување на гравиметриските геоиди во рамки на локалниот вертикален датум.

Методите за определување на геоид се:

- *KTH* – претставува стохастичка метода, која може да се каже е најприменлива во геодезијата (Sjöberg & Bagherbandi, 2017). Претставува директна метода на збир од различните влијанија врз гравиметриските геоидни ундулации. Тоа ќе претставува првата метода применета во рамки на овој докторски труд.
- *CSH* – претставува детерминистичка метода, каде е потребна модификација на Стоксовиот интеграл (2.35). Можат да се применат повеќе модификации на интегралот. Со неговата примена се интегрира модификацијата според Вонг-Гор. Овој метод се базира на принципот remove-compute-restore. Ова е втората метода која ќе се искористи во овој труд.
- *RCR* – претставува трета метода за определување на геоид. Се работи за метода каде има повеќе опции со колокација на најмали квадрати или спектрални методи преку примена на *FFT* (Фуриева трансформација) која може да биде просторна или рамнинска.

##### 4.4.1 *KTH* метода

Првата метода која се применува во овој докторски труд се нарекува *KTH* или *LSMSA* (Least Square Modification of Stokes formula with Additive Corrections). Тоа значи дека основниот интеграл за геоидни ундулации според Стокс се модифицира и се вметнуваат дополнителни корекции на приближните геоидни ундулации. Методата е претставена од страна на Проф. Ерик Сјоберг кој е дел од *KTH (Royal Institute of Technology)* институтот лоциран во Стокхолм, Шведска. Ова е прв пристап каде се користат податоците од *ГТМ* заедно со терестрички гравиметриски мерења.

Основниот израз во оваа метода е дефиниран со формулата (4.14):

$$N = \tilde{N} + \delta N_{comb}^{top} + \delta N_{DWC} + \delta N_{atm} + \delta N_{ell} \quad (4.14)$$

Тука,  $N$  е геоидна ундулација,  $\tilde{N}$  е приближна геоидна ундулација,  $\delta N_{comb}^{top}$  е комбинирана корекција за влијание на топографијата,  $\delta N_{DWC}$  е корекција (downward continuation) поради влијанието кое го имаат аномалиите при нивното аналитичко продолжување на површината од геоидот,  $\delta N_{atm}$  е корекција поради присуството на атмосферските маси околу предметната точка и  $\delta N_{ell}$  е корекција поради елипсоидната апроксимација на

Земјата. Практично, сите големини се пресметуваат независно, па на крајот се врши нивно сумирање.

Основната модификација која ја прави проф. Сјоберг на Стоксовиот интеграл е дефинирана со изразот (4.15) за пресметување на приближните геоидни ундулации (Sjöberg, 2003b):

$$\tilde{N} = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma_0} S_L(\psi) \Delta g d\sigma + \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^M b_n \Delta g_n \quad (4.15)$$

каде  $\Delta g$  се терестрички аномалии во слободен воздух,  $\sigma_0$  е интеграциското поле со сферен радиус  $\psi$  околу пресметувачката точка,  $S_L$  е модифицираната Стоксова функција,  $\Delta g_n$  се аномалии добиени од ГГМ,  $R$  претставува среден радиус на Земјата,  $\gamma$  е нормалното забрзување според Сомиглиани (Somigliana, 1929) и  $b_n$  е модификациски параметар. Тоа што проф. Сјоберг го направил е што основната Стоксова формула се однесува на сфера каде во секоја точка се познати вредностите за Земјиното забрзување. Сепак, не е возможно да имаме мерења во секоја точка на Земјата, па затоа е воведен вториот дел од (4.15). Тој дел ги претставува аномалиите добиени од ГГМ. Практично, со модифицирањето е направено дополнување на терестричките аномалии со оние од глобалните модели. Тоа би значело дека точкестите варијации во полето на Земјина тежа се дефинираат со податоците од гравиметриските мерења. Од друга страна, среднобрановите и долгобрановите варијации ги добиваме од ГГМ. На тој начин имаме комбинација на податоци од терестрички аномалии (повисоки степен-ред) и податоци од ГГМ во форма на коефициенти од пониски степен-ред.

Аномалиите од ГГМ  $\Delta g_n$  се таканаречени Лапласови хармоници на  $\Delta g$  (Heiskanen & Moritz, 1967) дефинирани со изразот:

$$\Delta g_n = \frac{2n+1}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g P_n(\cos\psi) d\sigma \quad (4.16)$$

Стоксовата функција е модифицирана во однос на радиусот  $\psi$ , па нејзиниот израз може да се запише како:

$$S^L(\psi) = S(\psi) - \sum_{n=2}^L \frac{2n+1}{2} s_n P_n(\cos\psi) \quad (4.17)$$

каде  $L$  е произволно избран максимален степен на модификацискиот параметар  $s_n$ . Максималниот степен  $L$  не мора да биде еднаков со максималниот степен на експанзија на избраниот ГГМ во пресметките.

Делот надвор од интеграциското поле  $\sigma_0$  кој е дефиниран со радиусот  $\psi_0$  е центриран на пресметувачката точка во Стоксовата интеграција. Тогаш, при интегрирањето, во надворешниот дел  $\sigma - \sigma_0$ , грешката поради скратување при занемарување на влијанијата на просторот надвор од интеграциското поле, може да се претстави со Лапласова серија за аномалиите на Земјина тежа преку изразот:

$$\frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma-\sigma_0} S_L(\psi) \Delta g d\sigma = \frac{R}{4\pi\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} Q_n^L(\psi_0) \Delta g_n \quad (4.18)$$

каде коефициентите се дефинирани со изразот (Sjöberg, 1991):

$$Q_n^L = Q_n^L(\psi_0) = \int_{\psi_0}^{\pi} S^L(\psi) P_n(\cos\psi) \sin\psi d\psi = Q_n(\psi_0) - \int_{k=2}^L E_{nk} S_k \quad (4.19)$$

каде за дефинирање на коефициентите  $Q_n(\psi_0)$  (Hagiwara, 1976), (Tenzer et al., 2009) и  $E_{nk}$  (Paul, 1973) следат изразите (4.20) и (4.21), соодветно:

$$Q_n(\psi_0) = \int_{\psi_0}^{\pi} S(\psi) P_n(\cos\psi) \sin\psi d\psi \quad (4.20)$$

и

$$E_{nk} = E_{nk}(\psi_0) = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{\cos\psi_0} P_n(t) P_k(t) dt \quad (4.21)$$

#### 4.4.1.1 Приближни геоидни ундулации

Изнесените изрази за пресметка на приближните ундулации се дефинирани како збир на аномалии добиени со мерење и од ГГМ. Тие се пресметани како да се комплетно точни, ослободени од било какви грешки. Сепак, тоа не е случај, па затоа се дефинираат грешките кои ги придружуваат терестричките аномалии  $\Delta g$  и аномалиите од ГГМ  $\Delta g_n$ . Во продолжение следи изразот за пресметка на приближните ундулации (Sjöberg, 1991) со дефинирани грешки:

$$\tilde{N} = \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{2}{n-1} - s_n^* \right) (\Delta g + \varepsilon_n^T) + \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^L s_n (\Delta g_n + \varepsilon_n^{\text{ГГМ}}) \quad (4.22)$$

каде  $\Delta g$  се терестричките аномалии,  $\Delta g_n$  се аномалии од ГГМ,  $\varepsilon_n^T$  се случајни грешки на терестричките аномалии и  $\varepsilon_n^{\text{ГГМ}}$  се грешки на аномалии од ГГМ. Параметрите  $s_n$  би требало да ги намалат грешките на двата типа аномалии и на краевите на интеграциските зони:

$$s_n^* = \begin{cases} s_n, & \text{ако } n \leq L \\ 0, & \text{за останати} \end{cases} \quad (4.23)$$

Геоидните ундулации според (Hofmann-Wellenhof, 2006 #17), можат да се запишат во спектрална форма според изразот:

$$N = \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\Delta g_n}{n-1} \quad (4.24)$$

Сепак, помеѓу равенките (4.15) и (4.24) постојат разлики кои се изразуваат преку средната квадратна грешка на геоидната ундулација со изразот:

$$m_{\tilde{N}}^2 = E \left\{ \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} (\tilde{N} - N)^2 d\sigma \right\} \quad (4.25)$$

Согласно изразите (4.22), (4.24) и (4.25), може да се дефинира конечниот израз за пресметка на глобалната средна квадратна грешка (Sjöberg & Bagherbandi, 2017) со компонентите на терестричките аномалии, ГГМ аномалиите и грешките на крајните делови на интеграциските зони преку изразот (4.26):

$$m_{\tilde{N}}^2 = c^2 \sum_{n=2}^{\infty} \left[ (b_n^* - s_n^* - Q_n^L)^2 c_n^2 + \left( \frac{2}{n-1} - s_n^* - Q_n^L \right)^2 \sigma_n^2 \right] + c^2 \sum_{n=2}^M b_n^2 dc_n^2 \quad (4.26)$$

каде  $c_n^2$  се варијанси (дисперзија) на степените на аномалиите од ГГМ,  $dc_n^2$  се варијанси (дисперзија) на грешките од аномалиите од ГГМ и  $\sigma_n^2$  се варијанси (дисперзија) на грешките од терестричките аномалии. Во понатамошниот текст ќе го користиме терминот варијанса за да биде во соодветен однос со терминот *variance* кој се користи во литературата на англиски јазик.

За решавање на равенката (4.26), потребно е да се дефинираат изразите за пресметување на различните варијанси за двата типа на аномалии (Sjöberg & Bagherbandi, 2017), па имаме:

За  $\sigma_n^2$  (варијанса на грешките од терестрички аномалии) е дефиниран изразот:

$$\sigma_n^2 = E \left\{ \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} (\varepsilon_n^T)^2 d\sigma \right\} \quad (4.27)$$

$dc_n^2$  (варијанса на грешки од ГГМ аномалии) ја претставува грешката или несигурноста на моделот до одреден степен, односно колку моделот отстапува од вистинскиот гравитациски сигнал. За нејзина пресметка е дефиниран изразот:

$$dc_n^2 = E \left\{ \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} (\varepsilon_n^{\text{ГГМ}})^2 d\sigma \right\} \quad (4.28)$$

$c_n^2$  (варијанси на сигналот на аномалиите од ГГМ) го претставува сигналот на коефициентите од моделот или моќта на реалниот гравитациски сигнал на моделот. Тоа би значело дека со варијансите се опишува колку информации носи моделот за вистинското гравитациско поле до одреден степен. Неговата пресметка е дефинирана со изразот:

$$c_n^2 = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g_n^2 d\sigma \quad (4.29)$$

Претпоставката е дека сите грешки се меѓусебно независни и се случајни.

#### 4.4.1.2 Модификациски параметри

Со селектирање на параметрите  $s_n$  и  $b_n$  (кој е функција од  $s_n$ ), можат да се презентираат три решенија: пристрасно, непристрасно и оптимално.

За пристрасното решение, следи дека  $b_n = s_n$ . За непристрасното решение го имаме изразот:

$$b_n = Q_n^L + s_n \quad (4.30)$$

За оптималното решение, следи изразот:

$$b_n = \frac{(Q_n^L + s_n) * c_n}{c_n + dc_n} \quad (4.31)$$

Дефинирањето на параметрите  $s_n$  и  $b_n$  се прави преку решавање на систем од равенки каде првично се определува параметар  $s_n$  преку изразот:

$$\sum_{r=2}^L a_{kr} s_r = h_k; k = 2, 3, \dots, L \quad (4.32)$$

Оттука, до израз доаѓа стохастичките карактеристики на *KTH* методот, каде произволно може да се изберат модификациските параметри, за разлика од детерминистичките, каде однапред треба истите да бидат дефинирани. За повеќе информации околу матричното интерпретирање на коефициентите и нивното определување можат да се погледнат (Sjöberg & Bagherbandi, 2017), (Abbak, 2011).

#### 4.4.1.3 Стоксова интеграција

Основниот израз за дефинирање на Стоксовиот интеграл (2.35) може да биде запишан со геодетски координати:

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} S(\psi_{PQ}) \Delta g_Q \sin\theta d\theta d\lambda \quad (4.33)$$

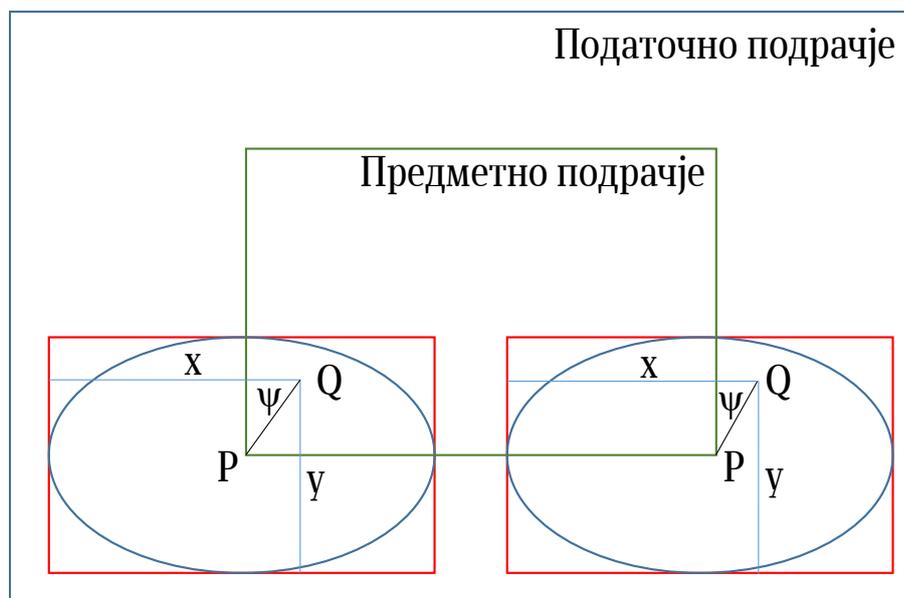
или со сферни координати:

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\pi} S(\psi_{PQ}) \Delta g_Q \sin\psi d\psi d\alpha \quad (4.34)$$

Тука,  $\theta = 90^\circ - \varphi$ ,  $P$  претставува предметна точка на која се вршат терестричките мерења,  $Q$  претставува интеграциска точка, на која се вршат пресметките на сферата. Растојанието помеѓу двете точки се пресметува преку зададениот сферен радиус  $\psi$ . Суштински, пресметката на геоидните висини се врши преку сведување на сите мерења на површината од геоидот преку нивно редуцирање. Потоа, се пресметува сферното растојание со кое се дефинира полето на интеграција. Следи множење на аномалиите на интеграциската точка  $\Delta g_Q$  со Стоксовата функција  $S(\psi_{PQ})$  и се врши интеграција во рамки на зададениот радиус.

Практичното решавање на Стоксовото интегрирање е преку трансформирање на  $d\sigma$  од равенката (2.35) на повеќе мали површини со користење на гريد техника за покривање на целата Земја (Abbak, 2011). Тоа значи дека просторот околу регионот за кој го пресметуваме геоидот се дели на повеќе квадрати. Во центарот на секој од тие квадрати се наоѓа интеграциската точка  $Q$  која се дефинира со сферниот радиус  $\psi$ . Секое интеграциско поле е дефинирано со големина на  $\Delta\varphi$  и  $\Delta\lambda$ . Разликите во ширина и должина се дефинирани со ширината и должината на точките  $P$  и  $Q$ .

Решавањето започнува со дефинирање на минимум ширина и должина, како и на интеграциски радиус  $\psi$ . Со тоа се започнува барањето на интеграциската точка  $Q$ . Ако радијалното растојание помеѓу двете точки е помало или еднакво на радиусот, тогаш се пресметува модифицираниот дел од Стоксовата функција  $S^L(\psi)$ . Ако е поголемо, тогаш се прескокнува пресметката. Сите интеграции се прават во насока исток-запад во рамки на една избрана географска ширина. Кога се преминува кон следната, тогаш се повторуваат пресметките на различни географски должини (Abbak & Ustun, 2014).



Слика 4.21 Интеграција во рамки на простор дефиниран со центар во точка  $P$

#### 4.4.1.4 Топографска корекција

Прва од корекциите кои се додаваат на приближните геоидни ундулации се корекциите за топографските маси кои ја опкружуваат предметната точка каде се вршат мерењата на Земјиното забрзување. Таа е корекција која има најголемо влијание во резултатите, претежно во планинските предели може да има вредност и од неколку метри. Во рамки на истражувањата во овој труд, нејзините вредности се движат од неколку сантиметри до неколку дециметри. Централно место во оваа поправка имаат висините екстрактирани од ДЕМ. Истата се добива како збир на директните и индиректните влијанија на топографските маси. Нејзината вредност се добива со изразот (Sjöberg, 2007):

$$\delta N_{\text{comb.}}^{\text{top}} = \delta N_{\text{dir.}} + \delta N_{\text{indi.}}^{\text{top}} = -\frac{2\pi G\rho H^2}{\gamma} \left(1 + \frac{2H}{3R}\right) \quad (4.35)$$

#### 4.4.1.5 DWC корекција

Втората поправка на приближните ундулации е поправката поради влијанието од продолжувањето на аномалиите на површината од геоидот. Во светската литература е позната како *downward analytical continuation correction (DWC)*. Тој термин ќе се користи и понатаму, поради конзистентност со литературата на англиски јазик. Откако ќе се воведо топографската корекција, повторно има мали промени кои треба да се предвидат, а се предизвикани од влијанието на аномалиите. Практично оваа поправка може да се пресмета за аномалиите на Земјина тежа во *RCR (CSH)* методот или за геоидните ундулации како во *KTH* методот (Varga, 2018). Во суштина поправката се состои од три дела кои се однесуваат на нејзино делење на влијание во рамки на Бугеовата плоча и теренскиот ефект. За пресметка на влијанието на аномалиите постојат повеќе методи (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005). Пресметката за влијанието на ундулациите се состои од основната равенка (Sjöberg, 2003c):

$$\delta N_{DWC} = \delta N_{dwc}^{(1)} + \delta N_{dwc}^{L1, Far} + \delta N_{dwc}^{L2} \quad (4.36)$$

каде првиот член се дефинира со изразот:

$$\delta N_{dwc}^{(1)} = \frac{\Delta g}{\gamma} + 3 \frac{\tilde{N}}{r_p} H_p - \frac{H_p^2}{2\gamma} \left( \frac{\partial \Delta g}{\partial r} \right) \Big|_p \quad (4.37)$$

Вториот член е дефиниран со изразот:

$$\delta N_{dwc}^{L1, Far} = \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^M (s_n^* + Q_n^L) \left[ \left( \frac{R}{r_p} \right)^{n+2} - 1 \right] \Delta g_n \quad (4.38)$$

каде  $\Delta g_n$  се превземаат од ГГМ, што значи дека треба да се одбере горна граница која максимално може да има вредност еднаква на степенот на максимална експанзија на одбраниот ГГМ.

Третиот израз од равенката (4.36) е дефиниран како:

$$\delta N_{dwc}^{L1, Far} = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma_0} S^L(\psi) \left( \frac{\partial \Delta g}{\partial r} \Big|_P \right) (H_P - H_Q) d\sigma_Q \quad (4.39)$$

каде  $r_P = R + H_P$ ,  $\sigma_0$  е сферичниот простор со радиус на интеграција  $\psi$  дефиниран околу точката  $P$ . Парцијалниот извод  $\frac{\partial \Delta g}{\partial r}$  претставува градиентот на Земјина тежа кој може да се пресмета со изрази дефинирани во (Heiskanen & Moritz, 1967), (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005). Оваа корекција е едно ниво со помали вредности отколку топографската. Нејзините вредности се движат во рамки на сантиметри.

#### 4.4.1.6 Атмосферска корекција

Комбинираната атмосферска корекција е третата поправка која се воведува. Таа се воведува за намалување на влијанието кое го имаат атмосферските маси во околината на предметната точка каде се вршат мерењата. Нејзиното влијание е помало од двете претходни корекции. Во рамки на овој труд, нејзините вредности се движат во рамки на милиметри. Во геодетската литература постојат два пристапи за дефинирање на оваа поправка. Едниот пристап е дефиниран од страна на *IAG (International Association of Geodesy)*, а другиот е во рамки на *KTH* методот. Тука ќе се претстават основните изрази за двата типа на пресметување.

Во *IAG* пристапот, се претпоставува дека Земјата е сферно тело со сферичен слој на атмосфера (Helmut Moritz, 1980). Ако  $M_a$  се дефинира вкупна маса на атмосферата, а со  $M(r)$  и  $m(r)$  се дефинирани масите надвор и внатре на сферата низ предметната точка на радиус  $r$ , тогаш директниот ефект на атмосферата врз Земјината тежа би бил дефиниран со изразот (Sjöberg & Bagherbandi, 2017):

$$\delta g^a = \frac{kM(r)}{r^2} = \frac{kM_a - km(r)}{r^2} \quad (4.40)$$

каде  $k$  е Њутновата гравитациска константа. Индиректниот ефект кој се предизвикува е доста мал, околу 7 милиметри, па често се занемарува. Согласно пристапот, изразот за пресметка на комбинираната атмосферска корекција е дефиниран согласно (Sjöberg, 1999):

$$\delta N_{atm} = -\frac{kR\rho^a}{\gamma} \iint_{\sigma_0} S^L(\psi) H_P d\sigma_0 \quad (4.41)$$

Од друга страна, во рамки на *KTH* пристапот оваа корекција зависи директно од изборот на *ГГМ*. Исто така, оваа корекција е зависна од изборот на интеграцискиот простор и сите модификациски параметри.

Конечниот облик е дефиниран со изразот (Sjöberg & Nahavandchi, 2000):

$$\delta N_{atm} = -\frac{2\pi R\rho^a}{\gamma} \sum_{n=2}^M \left( \frac{2}{n-1} - Q_{Mn} - s_n \right) H_n - \frac{2\pi R\rho^a}{\gamma} \sum_{n=M+1}^{\infty} \left( \frac{2}{n-1} - \frac{n+2}{2n+1} Q_{Mn} \right) H_n \quad (4.42)$$

Во равенките  $\rho^a$  претставува густина на атмосферата на нивото на морето, чија вредност генерално се зема  $\rho^a = 1.23 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , додека пак  $H_n$  претставува Лапласова хармониска функција од  $n$ -ти степен за топографската висина.

#### 4.4.1.7 Елипсоидна корекција

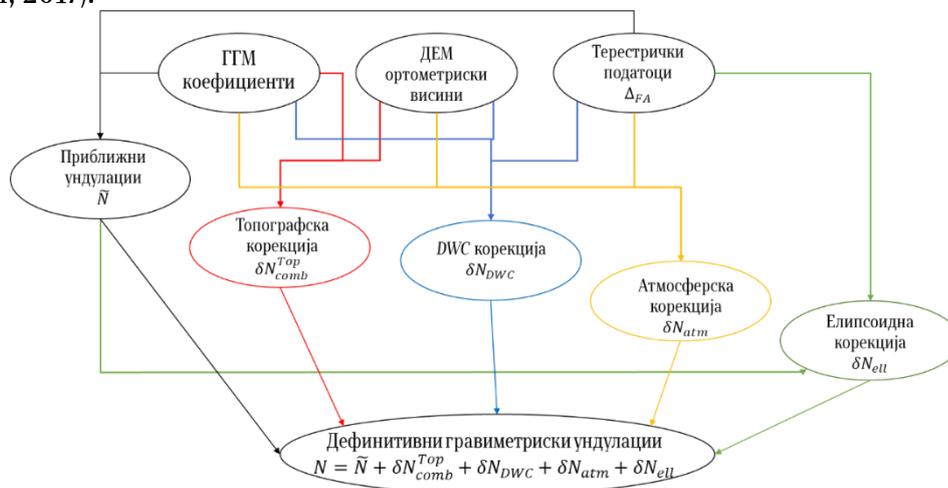
Елипсоидната корекција е последната поправка која е потребно да се додаде на приближните ундулации со цел да се добијат дефинитивните геоидни ундулации. Потребата од оваа корекција е поради причината што Стоксовата формула се користи за пресметување на геоидните висини од аномалии на Земјина тежа кои се однесуваат на сферна површина. Сепак, формата на Земјата не е сфера, туку елипсоидна со сплеснатост, па се очекува да се појават грешки во пресметките. Низ годините, повеќе автори се занимавале со дефинирање на решенија за оваа поправка (Huang *et al.*, 2003), (Fei & Sideris, 2000), (Sjöberg, 2003a). Оваа поправка е претставена како серија на сферни хармоници (Sjöberg, 2004) и е дефиниран изразот:

$$\delta N_{ell} \approx \psi_0 [(0.12 - 0.38 \cos^2 \theta) \Delta g + 0.17 \tilde{N} \sin^2 \theta] \quad (4.43)$$

Додека пак во овој труд за практично пресметување ќе биде искористена формулата дефинирана со (Ellmann & Sjöberg, 2004):

$$\delta N_{ell} \approx [(0.0036 - 0.0109 \sin^2 \varphi) \Delta g + 0.0050 \tilde{N} \cos^2 \varphi] Q_0^L \quad (4.44)$$

За повеќе детали околу пресметување на оваа корекција може да се искористи (Sjöberg & Bagherbandi, 2017).



Слика 4.22 Дијаграм на пресметување со KTH метода

Со помош на Слика 4.22 се прикажува начинот на пресметување на гравиметриските геоидни ундулации со *KTH* методата. Постапката практично започнува со:

- Дефинирање на приближните геоидни ундулации  $\tilde{N}$  преку користење на *ГМ* моделите и терестричките аномалии во слободен воздух;
- Втор чекор е пресметка на топографската корекција дефинирана со помош на податоците од *ГМ*, оргометриските висини од *ДЕМ* и користење на модел на густина на Земјината кора (во овој докторски труд вредноста е константна  $\rho_c = 2670 \text{ kg-m}^3$ ). Дефинирање на геоид со користење на модели на густина е нешто за кое може да се размислува во иднина за подрачјето на Република Македонија;
- Трета пресметка е *DWC* корекцијата, која е зависна од *ГМ*, *ДЕМ* и теренските аномалии во слободен воздух;
- Следи дефинирање на атмосферската корекција со користење на *ГМ*, *ДЕМ* и аномалиите во слободен воздух добиени со гравиметриски премер;
- Последна е елипсоидната корекција која ја добиваме со помош на приближните геоидни ундулации и терестричките аномалии;
- Со сумирање на приближните ундулации и четирите корекции се добиваат дефинитивните гравиметриски геоидни модели.

#### 4.4.2 *CSH* метода

Втората метода која детално се разработува во докторскиот труд е класичната Стокс-Хелмертова метода. *CSH* метода е изразот кој ќе се користи во понатамошниот текст. Се работи за детерминистичка метода која во својата основа исто како и кај *KTH* методот ја има равенката (2.35). Суштински, кај овој метод се врши модификација на Стоксовиот интеграл, со тоа што постојат повеќе решенија дефинирани од различни автори.

Стоксовиот интеграл дефиниран е во 1849 година, кога гравиметриските податоци биле ретки и практичната имплементација била незамислива. Фактот што има присуство на топографски маси, ја негира основната претпоставка за хармоничност на пореметувачкиот потенцијал надвор од геоидот. Сепак, тоа не било сметано како голем недостаток на Стоксовото решение.

Првиот исчекор го прави Хелмерт во 1884 година, кога предлага дека топографските маси можат да се заменат со бесконечно мал, тенок слој на површинска густина еднаква на производот од средната топографска густина со висината. Тој слој го нарекол “кондензациски слој”. Локациски, тој слој можел да биде на или под геоидот. Сепак, тоа што најголем дел од геодетите го користат како поедноставно решение е Хелмертовата втора кондензација, каде тој тенок слој експлицитно е лоциран на површината од геоидот (P. Vaníček & Martinec, 1994). Втората Хелмертова кондензација го зазема централното место во оваа метода. Начинот на кондензација е објаснет во поглавје 3.4.

Ова е метода која се базира на пристапот *RCR* (*remove - compute - restore*). Тоа е вториот пристап кој е најзастапен заедно со *KTH* методата во геодезијата за дефинирање на геоид. Типовите на *RCR* пристапи беа наброени во воведните дел на ова поглавје, а класичниот пристап е само еден од нив, кој ќе биде применет.

Пристапот *RCS* е дефиниран во три дела:

- Чекор *remove* - каде се користат терестричките аномалии во слободен воздух  $\Delta g_{FA}$ , аномалиите добиени од ГГМ  $\Delta g_{GGM}$  и директните влијанија на топографските маси  $\Delta g_{DTE}$ . Терестричките аномалии ги дефинираат точкестите промени во полето на Земјината тежа, кратkobрановите варијации се дефинираат преку директното влијание на топографските маси претставени преку ДЕМ и аномалиите од ГГМ ги дефинираат долгодбрановите варијации. Целта во овој чекор е од аномалиите во слободен воздух да се одземат аномалиите од ДЕМ и ГГМ моделите. Практично се добиваат остатоци на терестричките аномалии.
- Чекор *compute* - се вршат главните пресметки во овој чекор со помош на резидуалите (остатоците) на терестричките аномалии. Тука, се добиваат резидуали на геоидните ундулации.
- Чекор *restore* - се врши дефинирање на гравиметриските ундулации преку додавање на резидуалите од геоидните ундулации на ундулациите добиени од ГГМ и геоидните ундулации од ДЕМ.

#### 4.4.2.1 Детерминистички модификации на Стоксовиот интеграл

Во продолжение ќе бидат накратко претставени модификациите на повеќе автори за Стоксовиот интеграл пред негово имплементирање во оваа метода:

- **Вонг - Гор** (*Wong & Gore, 1969*)

Се работи за еден од првите модификации на Стоксовиот интеграл, а за овој труд најважен, бидејќи истиот практично ќе биде имплементиран. Оваа модификација се базира на равенката (4.15) каде  $L=M$ . Со тоа Стоксовата функција е скратена до степен  $M$  и е таканаречена сфероидална функција, а е дефинирана со изразот (4.17). Тогаш, параметрите се дефинирани како  $s_n = \frac{2}{n-1}$ . Практично, се врши комбинирање на ГГМ и терестричките податоци, со тоа што долгодбрановото влијание е скратено од терестричките податоци, на сметка на оние од ГГМ. Сепак, тоа скратување на долгодбрановите влијанија не резултира со добра интеграција. Грешката од скратувањето во овој пристап се дефинира со изразот:

$$\delta N_{WG}^M = -\frac{R}{2\gamma} \sum_{n=M+1}^{\infty} Q_n^M \Delta g_n \quad (4.45)$$

Поради сфероидалната функција, со отстранетите влијанија, вредностите на коефициентот  $Q_n^M$  е помала од  $Q_n$  кои се присутни во оригиналната Стоксова функција. Уште една идеја во оваа модификација е изборот на сферниот радиус  $\psi_0$  на точката каде Стоксовата функција  $S^M(\psi_0)$  има вредност нула.

- **Ваничек и Клосберг** (P. Vaníček & Kleusberg, 1987)

Во овој пристап Лежандровите полиноми од степен ( $2 \leq n \leq M$ ) се отстрануваат од сферичната Стоксова функција и се добива:

$$S^M(\psi) = S(\psi) - \sum_{n=2}^M \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi) = \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi) \quad (4.46)$$

Од каде произлегува и изразот за определување на геоидните ундулации кој гласи:

$$N = N_{GGM} + \frac{R}{4\pi\gamma} \int_0^{2\pi} \int_0^{\psi_0} S^M(\psi) \Delta g^M \sin\psi d\psi d\alpha \quad (4.47)$$

Во изразот (4.47) степенот на функцијата е избран да биде еднаков на степенот до кој терестричките аномалии се редуцирани. Доколку се избере максималниот степен на Стоксовата функција да е помал од максималниот степен на ГГМ кој се користи, тогаш се враќаеме повторно на примена на методата на Вонг-Гор.

- **Ваничек и Сјоберг** (Petr Vaníček & Sjöberg, 1991)

Во оваа модификација, членот  $S^M(\psi)$  од равенката (4.47) го добива обликот  $S^{M^*}(\psi)$  и претставува модификација според Молоденски објаснета од страна на Ваничек и Сјоберг. Тука, степенот на Стоксова модификација мора да е помал од максималниот степен на избраниот ГГМ, па функцијата го има обликот при  $L \leq M$  со изразот:

$$S^{M^*}(\psi) = S^M(\psi) - \sum_{k=2}^L \frac{2k+1}{2} t_k(\psi_0) P_k(\cos\psi) \quad (4.48)$$

Подетални информации околу детерминистичките модификации можат да се најдат во (P. Vaníček & Featherstone, 1998), (Sjöberg & Bagherbandi, 2017).

Во продолжение ќе бидат изложени теориските основи за дефинирање на геоидни ундулации кои практично ќе се применат во овој труд согласно пристапот Вонг-Гор.

#### 4.4.2.2 Модификација на Стоксовиот интеграл со Вонг-Гор

За потребите на оваа метода, следи модификацијата според Вонг-Гор за која претходно накратко беа објаснети нејзините својства, а во продолжение ќе бидат прикажани изразите кои ќе се искористат за практично пресметување на геоидот со оваа метода. Суштински, се врши модификација на добро познатиот Стоксов интеграл зададен со изразот (2.35). Овој израз го дефинираме како:

$$\tilde{N} = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma_0} S_L(\psi) (\Delta g_Q - \Delta g_P) d\sigma + N_{GGM} \quad (4.49)$$

каде  $\tilde{N}$  претставува збирот на ундулации од ГГМ и од терестричките аномалии. Понатаму, првиот дел од изразот (4.49) кој се однесува на придонесот од терестричките аномалии во геоидните ундулации може да се запише како:

$$N_T = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma_0} S_L(\psi)(\Delta g_Q - \Delta g_P)d\sigma + \frac{R}{4\pi\gamma} \Delta g_P \iint_{\sigma_0} S_L(\psi)\sin(\psi)d\sigma \quad (4.50)$$

каде  $\Delta g_P$  и  $\Delta g_Q$  претставуваат средните аномалии на предметната и интеграциската точка, соодветно. Во изразот (4.50), вториот дел од равенката може да се запише како:

$$N_2 = \frac{R}{4\pi\gamma} \Delta g_P \int_{\psi=0}^{\psi=\psi_0} S_L(\psi)P_0\cos(\psi)\sin(\psi)d\psi \quad (4.51)$$

и со вметнување на коефициентите поради скратување, изразот ја добива следната форма:

$$N_2 = -\frac{R}{2\gamma} \Delta g_P Q_0^L \quad (4.52)$$

каде коефициентот на Молоденски  $Q_0^L$  може да се претстави како:

$$Q_0^L = Q_0 - \sum_{k=2}^L \frac{2k+1}{2} s_k e_{k0} \quad (4.53)$$

каде  $Q_0$  е коефициент од нулти ред, додека  $e_{k0}$  се функции од  $\psi_0$ .

#### 4.4.2.3 Практични формули за CSH метод

Основниот израз за дефинирање на геоидот е:

$$\hat{N} = N_{GGM} + N_{\Delta g_{red}} + N_{PITE} \quad (4.54)$$

каде  $N_{GGM}$  претставуваат геоидните ундулации пресметани од ГГМ,  $N_{PITE}$  претставуваат корекциите на геоидните ундулации поради примарниот индиректен топографски ефект, а централното место го зазема  $N_{\Delta g_{red}}$  кои претставуваат резидуалите на геоидните ундулации. Овој член се добива со помош на резидуалите од аномалиите добиени во чекорот *remove*.

Геоидните ундулации од ГГМ се добиваат со изразот:

$$N_{GGM} = \frac{kM}{\gamma r} \sum_{n=2}^{n_{max}} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n x(\Delta \bar{C}_{nm}\cos m\lambda + \bar{S}_{nm}\sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (4.55)$$

каде  $kM$  претставува производот на Њутновата гравитациска константа со Земјината маса,  $\gamma$  е нормалното Земјино забрзување,  $r$  е радиус вектор на предметната точка,  $a$  е големата полуоска на ниво-елипсоидот,  $n$  е степенот на избраниот ГГМ,  $m$  е редот на

избраниот ГГМ,  $\Delta$  претставува разлика на коефициентите помеѓу ГГМ и ниво-елипсоидот,  $\bar{C}_{nm}$  и  $\bar{S}_{nm}$  се нормализирани хармониски коефициенти,  $\bar{P}_{nm}$  е нормализирана Лежандрова функција,  $\theta$  е геодетски поларен агол ( $\theta = 90^\circ - \varphi$ ) и  $\lambda$  е геодетска должина на предметната точка. Пресметувањето на овие геодетски ундулации се врши преку ICGEM, каде се пресметуваат со користење на хармониските коефициенти со кои се дефинираат ГГМ во вид на *gfc* документ. Оваа големина во најголем дел ги дефинира конечните вредности за геодетските висини, со оглед на фактот дека во изразот (4.54) другите два члена претставуваат поправки за ундулациите. Вредноста  $N_{SITE}$  се пресметува според изразот (3.10), додека пак вредноста на  $N_{\Delta g_{red}}$  се пресметува со изразот:

$$N_{\Delta g_{red}} = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} S(\psi) \Delta g_{red} d\sigma \quad (4.56)$$

Каде централно место заземаат резидуалите на аномалиите  $\Delta g_{red}$ . Нивната вредност ја добиваме преку изразот:

$$\Delta g_{red} = \Delta g_{FA} - \Delta g_{GGM} - \Delta g_{DTE} \quad (4.57)$$

каде  $\Delta g_{FA}$  се терестричките аномалии во слободен воздух,  $\Delta g_{GGM}$  се аномалиите од ГГМ и  $\Delta g_{DTE}$  се директните влијанија на топографските маси.

Аномалиите во слободен воздух ги добиваме со изразот (3.14), додека пак  $\Delta g_{GGM}$  ги дефинираме со изразот:

$$\Delta g_{GGM} = \frac{kM}{r^2} \sum_{n=2}^{n_{max}} (n-1) \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n x (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (4.58)$$

Останува уште дефинирање на  $\Delta g_{DTE}$  со изразот (Serpas, 2004):

$$\Delta g^{DTE} = -\frac{k\rho R^2}{2} \iint_{\sigma} \frac{(H_Q - H_P)^2}{l_0^3} d\sigma \quad (4.59)$$

После воведување на оваа корекција, простор помеѓу Земјината површина и геоидот останува хармониски, но поради Хелмертовата кондензација врз тенок слој на геоидот, постои промена помеѓу вистинските и кондензираните маси. Тоа не доведува до дополнително проширување на изразот (4.57) со секундарната индиректна топографска корекција дефинирана со изразот (Abbak *et al.*, 2024):

$$\Delta g_{SITE} = -\frac{2\pi k\rho H^2}{R} \quad (4.60)$$

После корекциите за топографските маси, во предвид мора да се земат и атмосферските маси кои постојат околу предметните точки на кои се вршат мерењата, па слично како и кај *KTH* методот ја воведуваме атмосферската корекција  $\Delta g_{DAE}$  дефинирана со (NOAA *et al.*, 1976), (Abbak *et al.*, 2025):

$$(4.61)$$

$$\Delta g_{DAE} = 0.871 - 1.0298 \times 10^{-4}H + 5.3105 \times 10^{-9}H^2 - 2.1642 \times 10^{-13}H^3 + 9.5246 \times 10^{-18}H^4 - 2.2411 \times 10^{-22}H^5$$

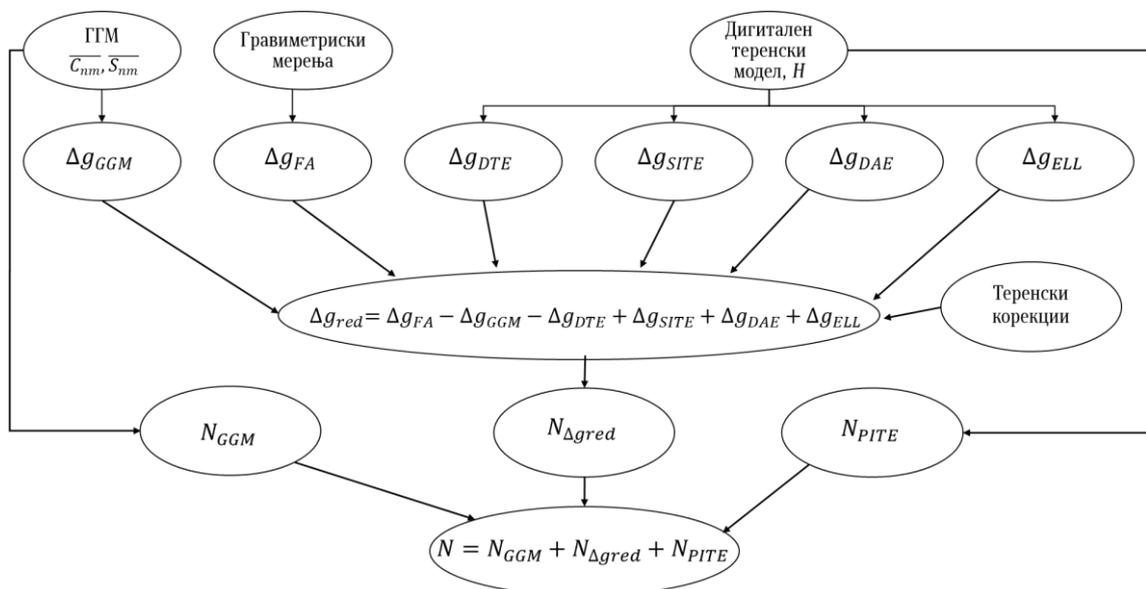
каде  $H$  претставува средната висина на гريد центрите добиена од ДЕМ.

Останува уште корекцијата поради апроксимацијата на Земјата со елипсоид. Се работи за слична корекција како елипсоидната корекција во КТН методот. Таа е дефинирана со изразот (Jekeli, 1981):

$$\Delta g_{ELL} = -\frac{e^2}{R} \sin \theta \cos \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{e^2}{R} (3 \cos^2 \theta - 2) T \quad (4.62)$$

Со дефинираните корекции, изразот (4.57) ќе го добие обликот (4.63) како дефинитивен што ќе се користи во пресметките со СШ методот:

$$\Delta g_{red} = \Delta g_{FA} - \Delta g_{GGM} - \Delta g_{DTE} + \Delta g_{SITE} + \Delta g_{DAE} + \Delta g_{ELL} \quad (4.63)$$



Слика 4.23 Дијаграм на пресметување со СШ методот

Со помош на Слика 4.23 се прикажува начинот на пресметување на гравиметриските геодни ундулации со СШ методата. Постапката практично започнува со:

- Влезни податоци во пристапот се посебно дефинирани датотеки за ГМ, теренски мерења на Земјино забрзување, ДЕМ модел и теренски корекции;
- Втор чекор е пресметка на аномалии од ГМ, терестрички аномалии во слободен воздух, корекција за директен топографски ефект, корекција за секундарен топографски ефект, корекција за атмосферските маси и корекција за апроксимација со елипсоид на Земјата;
- Трет чекор е вклопување на сите аномалии и корекции заедно во изразот (4.63) со цел пресметка на резидуалите на аномалии  $\Delta g_{red}$ ;
- Со пресметаните резидуали на аномалии, се пресметува резидуалната поправка за геодните ундулации  $N_{\Delta gred}$  со изразот (4.56), а паралелно се пресметуваат

геоидните ундулации од ГГМ  $N_{GGM}$  и корекцијата на ундулациите поради примарниот индиректен топографски ефект  $N_{PITE}$ ;

- Последен чекор е сумирање на трите големини и добивање на дефинитивните гравиметриски геоидни ундулации.

## 5. ПОДРАЧЈЕ И ПОДАТОЦИ ЗА ЛОКАЛЕН ГЕОИД

Во ова поглавје, преминуваме кон практичниот дел на докторскиот труд. Првично се дефинираат границите на предметното подрачје, а потоа следи дефинирање на сите потребни податоци, како и нивните извори за добивање на моделите на геоид.

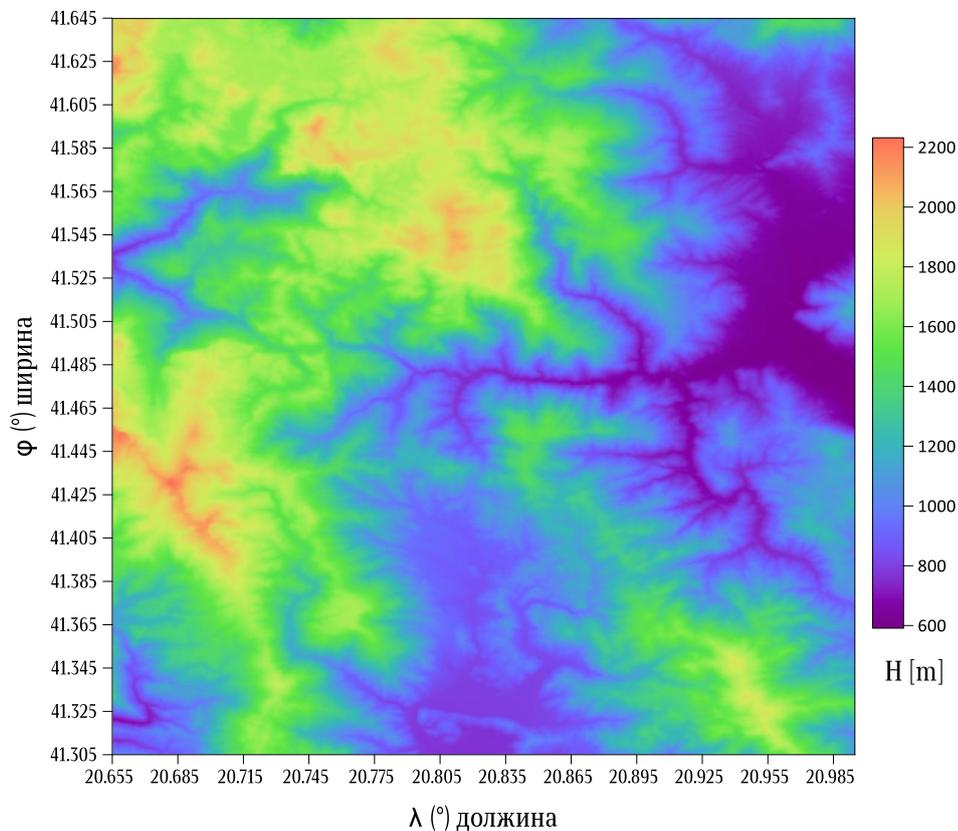
Редоследот на ова поглавје е слично на поглавје 4.3 каде беа објаснети подетално податоците кои се потребни:

- Глобални геопотенцијални модели
- Дигитални теренски модели
- Терестрички аномалии на Земјина тежа
- ГНСС-нивелман мерења

### 5.1 Предметно подрачје за определување на локален геоид

Предметното подрачје кое е избрано во овој докторски труд е лоцирано во северозападниот дел на Република Македонија, кој се протега од  $\varphi_{min} = 41^{\circ}18'18'' (41.305^{\circ})$  до  $\varphi_{max} = 41^{\circ}38'42'' (41.645^{\circ})$  северна географска ширина и  $\lambda_{min} = 20^{\circ}39'18'' (20.655^{\circ})$  до  $\lambda_{max} = 20^{\circ}59'42'' (20.995^{\circ})$  источна географска должина. Причината поради која граничните вредности се запишани и во децимален запис е затоа што повеќето прикази ќе ги имаат тие вредности по своите оски.

Овој регион се карактеризира со динамичен топографски распоред, каде минималната надморска висина изнесува  $\approx 600$  m, а максималната е  $\approx 2200$  m, додека просечната н.м.в. е околу 1264 m.



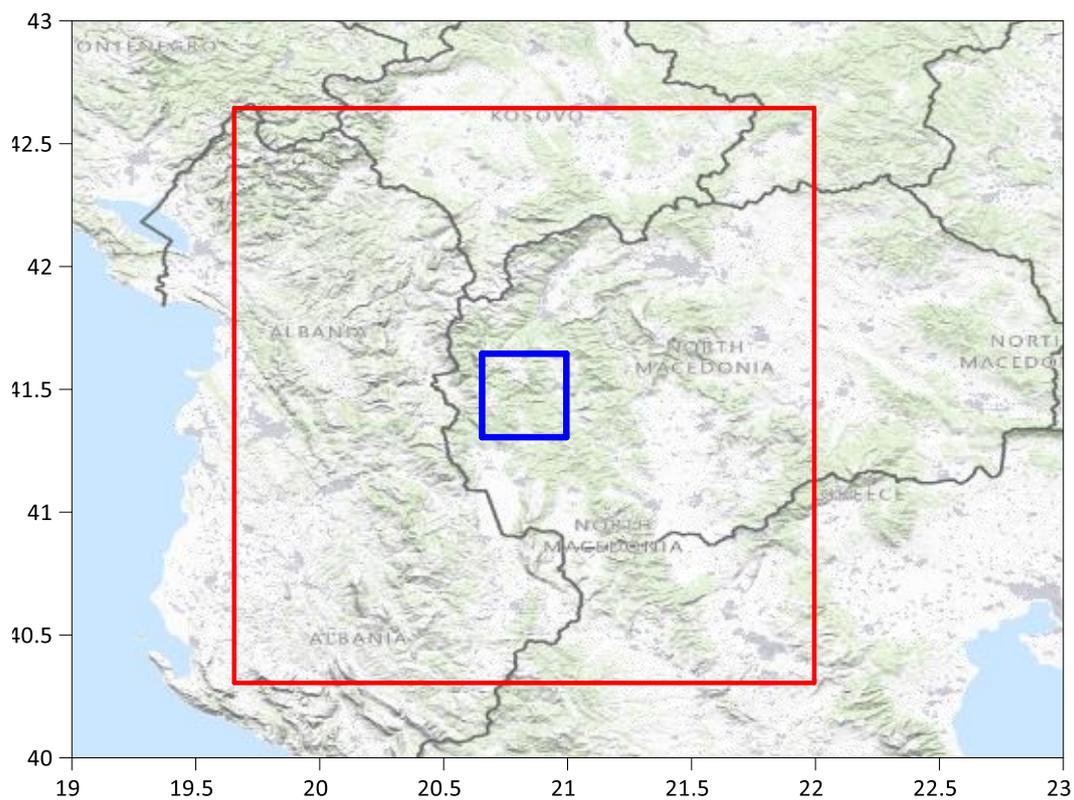
Слика 5.1 Предметно подрачје за локален геоид

Во поглавје 4.3.2 беа објаснети топографските карактеристики за Република Македонија, каде можеше да се забележи согласно

Слика 4.16 дека постојат два региони каде има променлива топографија, па пресметките на геоид ќе се позначајни. Едниот е во југоисточниот дел на нашата земја, а вториот е тој што е прикажан на Слика 5.1.

Во предметниот регион западниот дел се карактеризира со изразена топографија, со надморски висини кои варираат од  $\approx 1500$  m до  $\approx 2200$  m, додека пак источниот се карактеризира со висини од  $\approx 600$  m до  $\approx 915$  m. Предметното подрачје се карактеризира со територија зафатена со  $20^{\circ}24''$  по геодетските ширина и должина или приближна површина од  $1072$  km<sup>2</sup>.

Со оглед на фактот дека методите кои се користат за определување на геоид се комбинации на терестрички и сателитски методи и нивните изрази кои содржат грешки, потребно е дополнително проширување на полето каде имаме познати податоци. Тоа би значело дека терестричките аномалии добиени со мерење, не се доволни за определување на моделите. Проширувањето важи подеднакво за *KTH* и *CSH* методот. Во литературата најчесто се користи проширување од дополнителен 1 степен во сите четири насоки, со што се дефинира податочното подрачје како важен термин во понатамошните пресметки. Проширувањето се прави поради грешката при скратување при интегрирање на гравитациските аномалии во краевите на интеграциските зони (Abbak, 2011), (Abbak & Ustun, 2014), (Abbak et al., 2024).



Слика 5.2 Предметно и податочно подрачје

Со проширувањето, податочното подрачје ги добива границите означени со црвена боја на Слика 5.2, додека пак со сина боја се означени границите на предметното подрачје.

Точните гранични точки на податочното подрачје се зададени во Табела 5.1:

Табела 5.1 Граници на податочно подрачје

Локација	$\varphi$ (° ' ")	$\lambda$ (° ' ")
југозапад	40°18'18"	19°39'18"
северозапад	42°38'42"	19°39'18"
југоисток	40°18'18"	21°59'42"
североисток	42°38'42"	21°59'42"

Од Слика 5.2 се забележува дека податочното подрачје зафаќа делови од соседните држави. На запад, најголемо е зафаќањето на Република Албанија, со мали делови од југот на Република Црна Гора. На север, потребни се податоци кои се наоѓаат во делови од Косово и Република Србија. На исток доволни се податоците со кои располагаме за нашата земја до  $\lambda=22^\circ$ . Останува уште јужниот дел кој зафаќа делови од Република Грција. Може да се каже дека овој проблем со проширување на предметното подрачје и креирање на податочно подрачје, секогаш повлекува потреба од податоци за гравиметриски мерења на територии од соседни држави. Со оглед на фактот дека почесто се прават дефинирања на национални модели на геоид, некогаш и цели соседни земји влегуваат во податочните подрачја (Varga, 2018). Надминувањето на проблемот има две решенија: помош од соседните држави преку добивање на нивните податоци или потпирање на податоците од ГГМ моделите за локациите каде е потребно дополнување на празнините во податочното подрачје.

Првото решение речиси е и невозможно, бидејќи во овој случај потребно се податоци од четири соседни држави, што повлекува долготрајни бирократски процеси. Затоа се користи второто решение и се превземаат податоци од ГГМ преку ICGEM. Во овој труд, дополнувањето се врши со податоци од моделот EGM2008 (Pavlis et al., 2012). Дополнувањето се однесува на аномалии во слободен воздух добиени од ГГМ.

## 5.2 Методи за интерполација

Пред да се примени Стоксовата интеграција, потребно е да се дефинираат вредностите за аномалиите на Земјина тежа за целата предметна и податочна територија. Тоа значи дека податоците кои имаат случаен, нехомоген распоред потребно е да се искористат за да се изврши интерполирање. На тој начин ќе се добие GRID-мрежа која на одредени растојанија по Y и X оските ќе имаат соодветна вредност. Како можност за интерполирање се нудат во софтверскиот пакет *Golden Surfer* кој ќе биде искористен за дефинирање на GRID-мрежите. За интерполирање на податоци постојат доста опции, а некои кои се тестирани во овој труд се следните:

- **Cokriging** - оваа процедура е продолжение на методот "kriging" кој во продолжение ќе биде објаснет. Тука, потребен е мултиваријантен вариограм или коваријациски модел. Практично, променливата од интерес е "кокригирана" на одредена локација од податоците за себеси и за помошните променливи околу неа. Тоа значи дека за определување на најверојатните вредности за првата променлива, потребна е втора променлива. Втората променлива е погусто распоредена во однос на првата. Во оваа метода потребни се вариограми за првата променлива, за втората

променлива и крос-валидација помеѓу нив. Локациите на променливите можат да бидат за исти или различни точки. Суштински, постојат три ситуации: комплетна хетеротропија (променливите се мерени на различни локации и немаат ни една заедничка), делумна хетеротропија (променливите имаат одредени заеднички точки) и изотропија (податоците се дефинирани на исти точки) (Wackernagel, 1995).

- **Data Metrics** – оваа метода не ги користи хомогените средни вредности за интерполација на GRID точките (јазлите). Наместо тоа, се користи локален сет на податоци дефинирани од страна на корисникот, а кои ќе бидат дефинирани понатака (во делот на статистичка анализа на интерполацијските методи). За одредена јазолна точка се дефинираат вредностите  $(r, c)$  со сет на локални податоци  $S(r, c)$  кои содржат информации во однос на параметрите за пребарување, со центар на дефинираната јазолна точка (Yilmaz, 2007). Тоа значи дека интерполирањето се врши за секоја ќелија посебно во рамки на целата мрежа.
- **Inverse Distance to a Power** – оваа метода е една од најбрзите и најкористените за интерполација. Предвидувањата за променливата се прават преку давање повеќе тежина (степен на доверба) на поблиските точки. Оваа метода не бара предзнаења, како што е модел на вариограм. Самото име укажува на фактот дека со оддалечување од предметната точка, се намалува влијанието на точките. Покрај фактот дека е едноставна метода, сепак влезните податоци ги дефинираат крајните резултати во голема мера (нехомоген распоред, изотропска-анизотропска дистрибуција), бројот на соседни точки кои се користат, експоненцијал на растојанието кое влијае на тежините (Babak & Deutsch, 2008). Со оваа метода не се прави екстраполација на вредностите. Како несакан ефект се појавува таканаречен “*bull’s eye*” со кој се формираат концентрични кружници околу некоја позната точка, бидејќи како што беше наведено повеќе доверба се даваат на блиските точки. Тоа резултира со интерполирана површина која ја рефлектира вредноста на влезните податоци во регионите каде мерењата не се густе.
- **Kriging** – оваа метода е една од најфлексибилните и е корисна за интерполација на речиси секаков тип на податоци. Овој метод е дефиниран за потребите на рударската геологија и е именувана по јужноафриканскиот рударски инженер Дани Криге. Тежините кај овој метод се дефиниран во однос на просторната структура на датотеките. Првично, се дефинира вариограм на познатите, мерени вредности со цел да се разбере поврзаноста на вредностите на точките. Откако ќе се добијат тежините, истите се имплементираат кај познатите точки со цел да се дефинираат вредностите на непознатите точки. Корелацијата на податоците се однесува на географската близина и сличностите на познатите податоци. Слично како кај *IDW* методата, тежините се поголеми за соседните точки во близина на непознатата, а со растојанието и нивната вредност се намалува. Тежините во предвид ги земаат и просторниот распоред на сите мерења. Постојат три типа на *kriging*: едноставен (претпоставка за средна вредност на случаен регион), стандарден (константна средна вредност за непознатата) и универзален (се користи за податоци со непозната средна вредност). Кај повеќето податоци, примената е со класичен линеарен вариограм кој е доста ефикасен. Сепак, за поголеми датотеки е доста бавна опција. За разлика од

*IDW*, со оваа метода се врши и екстраполација на променливите (Matheron, 1963).

- **Local Polynomial** – овој метод се карактеризира со доделување на вредности во рамки на една ќелија, наместо на целиот сет податоци, затоа и името локален полиномски модел. Вредностите се дефинираат преку пребарувачката елипса која ја дефинира корисникот преку тежински полином со најмали квадрати. Оваа метода се користи кога нема големи разлики во вредностите помеѓу познатите точки, односно каде што постои глатка промена во рамки на пребарувачката околина. Брзината на пресметување не зависи од големината на податоците.
- **Minimum Curvature** – метод каде интерполирањето се врши преку вклопување на дводимензионална површина на XYZ податоците, со што кривата на површината е минимална. Овој метод е идеален кога се очекува интерполираната површина да биде глатка, со мали разлики помеѓу вредностите на точките, а исто така и времето на пресметување е брзо. Најдобра примена има кога податоците се случајно распоредени во произволни линии. Сепак, доколку вредностите се менуваат скоковито помеѓу познатите точки, тогаш може да предизвика грешки во регионите каде нема никакви мерења. Може да се направи и екстраполација со оваа метода (Briggs, 1974).
- **Modified Shepard's Method** – претставува метода дефинирана од Шепард во 1968 година (Shepard, 1968), со која се креира површина базирана на тежини обратнопропорционални од растојанието од познатите точки со најмали квадрати. Подоцна било откриено дека оваа метода содржела влијанија на вредностите од точки кои се далеку од точката на интерполација. Франке и Нилсон (Franke & Neilson, 1980), развиле модификација во која тежинската функција има локална поддршка од соседните точки и затоа се локализира целата претпоставка, наместо да се однесува на целата површина. Оваа метода е слична со *IDW*, со разликата дека нема тенденција за генерирање на “*bull's eye*”. Методата може да се користи и за екстраполација (Thacker et al., 2010).
- **Moving Average** – претставува процес на пресметување на нови вредности на познатите локации базиран на вредностите од околните точки. Вредноста ќе биде аритметичка или општа (тежинска) аритметичка средина. Голем број на параметри влијаат на конечниот резултат, а пред се обликот на дефинираното “соседство” во рамки на кое се вршат пресметките. Најчесто обликот се избира да биде круг, па во секој правец точките подеднакво влегуваат во согласност со избраниот радиус. Други облици кои се избираат се правоаголници или квадрати. Друг фактор е радиусот кој влијае на тежината. Покрај радиусот, исто така и бројот на соседни точки кои влегуваат во пресметките се важни. За ова Буроу (Burrough, 1986), дал сугестија тоа да биде помеѓу 4 и 12 точки, а најдобри резултати би дале помеѓу 6 и 8 точки. Голем број на точки би значело глатка површина која не би била реален репрезент на теренот, додека пак мал број на точки би значело можна појава на екстремни вредности при интерполирањето. Овој метод е најприменлив кога има големи или густо датотеки, со оглед на краткото времетраење на интерполирање (Dobrovolny, 2013).

- **Natural Neighbor** – се работи за метода чиј креатор е Робин Сибсон (Sibson, 1981). Како што и претходно беше објаснето, повеќето методи ги дефинираат вредностите за една точка во однос на околните, блиски точки. Во овој пристап идејата е дека просторната конфигурација на природен начин определува која точка е соседна (neighbor), со што параметрите зависат од геометриската релација помеѓу две точки. Се работи за метода каде нема претходно дефинирање на критериуми за определување на вредности. Нејзиното користење произлегува од фактот дека генерира добри GRID податоци кога во одреден регион постојат погусты мерења, а во друг поретки. Не се користи за екстраполација.
- **Nearest Neighbor** – претставува една од најупотребуваните методи. Нејзината едноставност и брзина наоѓа голема примена, особено во процесирањето на слики при менување на големина во ГИС индустријата. За нејзино користење, потребно е мерењата да се хомогено распоредени или приближно хомогено, со што се врши исполнување на мал број празни места во GRID-мрежата. Претставува метода која е егзактна и не врши екстраполација.
- **Polynomial Regression** – претставува метода за дефинирање на трендови од голем размер. Практично и не претставува интерполациска метода, туку начин за израмнување на мерените податоци и креирање на GRID површина (Draper & Smith, 1981). Пред користењето на оваа метода потребно е да се дефинира типот на површина и параметрите. Типот на површина се дефинира преку полиномска форма на равенка со што можни избори се: рамнинска површина, билинеарна, квадратна и кубична површина. Претставува брза метода за работење со секаков тип на податоци, но локални детали можно е да не се адекватно претставени. Има можност за екстраполација на податоците.
- **Radial Basis Function** – претставува метода на директна интерполација. За оваа метода е потребно однапред да биде избрана основна функција по која ќе се врши интерполацијата. Таа функција се поставува на секоја позната точка. Функциите кои се можен избор се: *inverse multiquadric*, *multilog*, *multiquadric*, *natural cubic spline* и *thin plate spline*. Тие се разликуваат во начинот на дефинирање на самата функција. Тоа зависи од влезните параметри  $h$  (анизотропско растојание од точката до јазолната точка на GRIDот) и  $R^2$  (обликувачки фактор дефиниран од корисникот). Секоја функција има своја форма и ќе резултира со различна интерполирана површина (de Gooijer *et al.*, 2024).
- **Triangulation with Linear Interpolation** – метода во која се користи триангулација на Делунеј за пресметување на низа триаголници од предметните точки и да се интерполираат јазолните точки од косините на триаголниците. Оваа метода е брза, но може да генерира грешки помеѓу точките кога се работи со мали сетови на податоци или кога во големи сетови постојат подрачја со ретки мерења. Претставува егзактна интерполациска метода и не врши екстраполација на податоците (Lee & Schachter, 1980).

Крајната цел е користење на сите интерполациски методи за добивање на GRID мрежа на аномалиите на Земјина тежа. Споредбена анализа на методите преку нивно валидирање со помош на крос-валидација. Постапката се прави со отстранување на познати точки и добивање на интерполирани вредности за истата точка. Тоа може да се повтори за точки кои ги дефинира корисникот. Суштината е во определување на

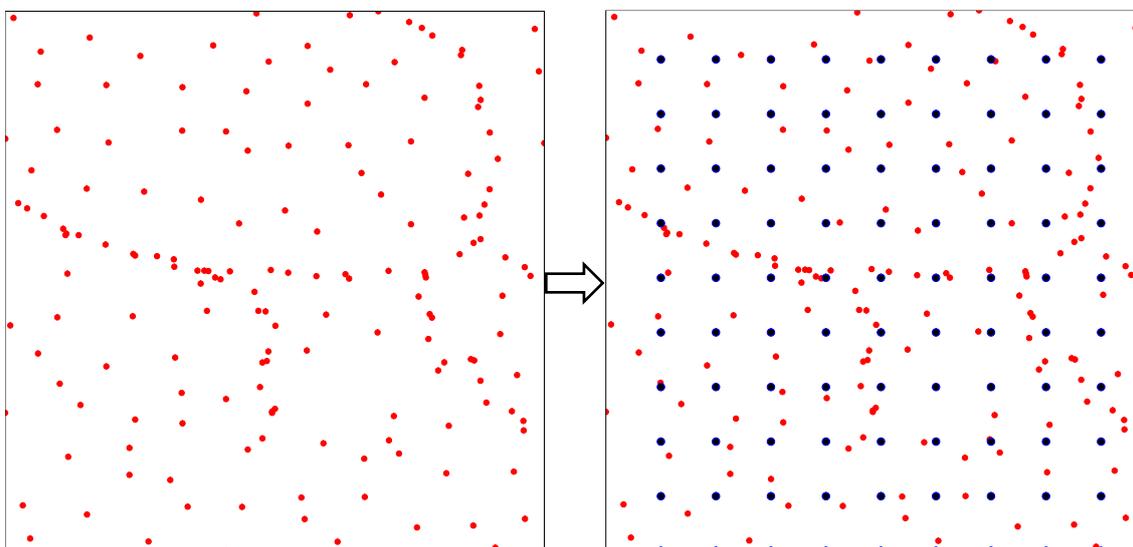
разликите помеѓу вистинската и интерполираната вредност. Преку оцена на точност на разликите се дефинира која метода е најповолна за користење при интерполирање на аномалиите. Оцената на точност се дефинира преку повеќе статистички показатели како што се средна квадратна грешка (*RMSE*), стандардна девијација (*STD*), минимум, максимум и средни вредности на разликите. Изразот за пресметување на *RMSE* е:

$$x_{rmse} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}} \quad (5.1)$$

каде  $x_i$  е вредност на разлика и  $n$  е број на точки каде е пресметана разликата. Слично, ја дефинираме и формулата за пресметка на *STD*:

$$x_{std} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} \quad (5.2)$$

каде  $\bar{x}$  претставува аритметичка средина на разликите. Со *RMSE* се дефинира колку е средната грешка на сите разлики, додека пак со *STD* се пресметува колку секоја од разликите отстапува од средната вредност. Со имплементација на одредена параметарска површина, поглавје 4.2, се отстрануваат средните вредности од секоја разлика, па *RMSE* добива идентична вредност со *STD*. Равенките (5.1) и (5.2) се најважни во рамки на сите валидации и пресметки кои се прават во понатамошниот дел од трудот. Се работат за статистички големини со чии вредности се оценуваат методите на интерполација, споредбите на *ГГМ* со *ГНСС*-нивелман, *ДЕМ* со нивелманските мерења, како и дефинитивните геоидни модели.



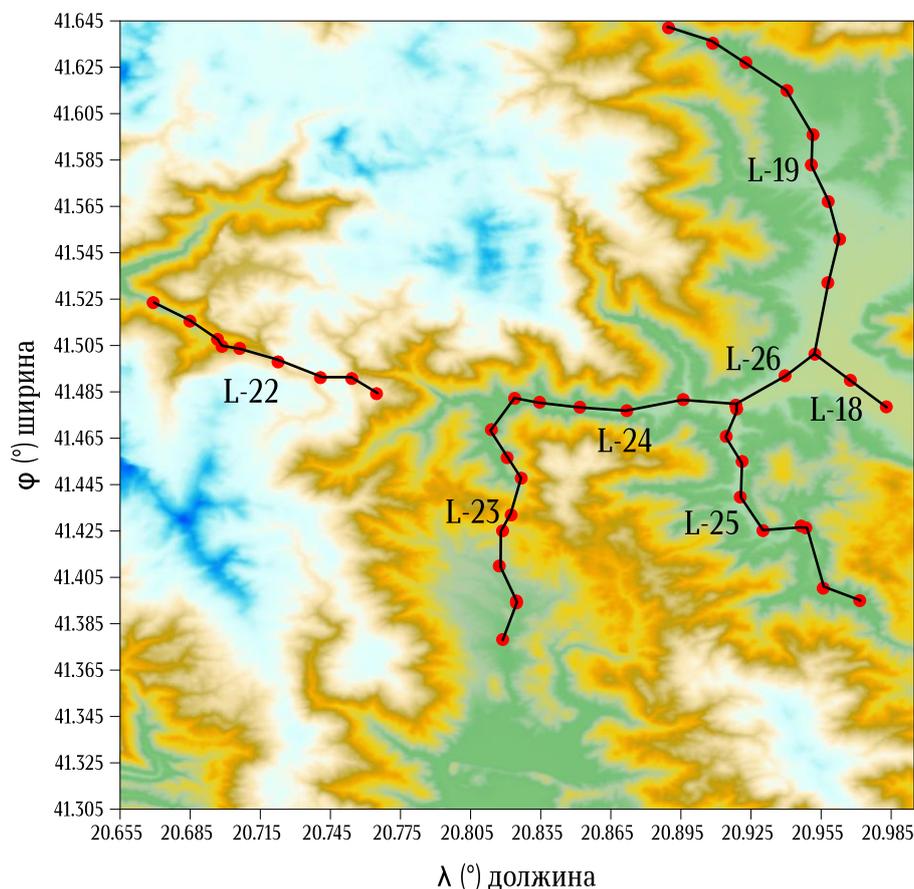
Слика 5.3 Распоред на аномалии во слободен воздух (лево) и интерполирана мрежа (десно)

На Слика 5.3 е прикажан еден пример за тоа како изгледа постапката на интерполација. Практично на левата слика е прикажан распоредот на аномалиите во слободен воздух за предметното подрачје. Преку соодветен избор на метода за интерполација, се добива десната слика каде со црвени точки се мерените вредности на Земјиното забрзување, а со сини боја се означени интерполираните вредности на мрежа

јазлите во рамки на дефинираните граници. Со помош на тие интерполирани вредности понатаму се вршат сите пресметки.

### 5.3 Податоци за ГНСС-нивелман

Во поглавје 4.3.4 се претставени нивелманските податоци со кои се располага за целата територија на Република Македонија. Во рамки на кампањата НВТ 3 се дефинирани 1098 нивелмански точки (Kasapovski *et al.*, 2018). За потребите на валидацијата на гравиметриските модели на геоид и глобалните геопотенцијални модели се користат 46 ГНСС-нивелмански точки. Од тие точки: една е фундаментален репер, три точки се јазолни, три точки се од пасивната ГНСС мрежа и 37 точки се обични вертикални и хоризонтални репери. ГНСС мерењата се прави врз точките или во нивна близина. Положбените координати и елипсоидните висини се во системот *ETRS89*, чија основа е елипсоидот *GRS80*, што е важно за конзистентност со *GGM*. Со оглед на извршените сателитски мерења се овозможува дефинирање на геометриските геоидни ундулации преку разликите на елипсоидните и ортометриските висини.



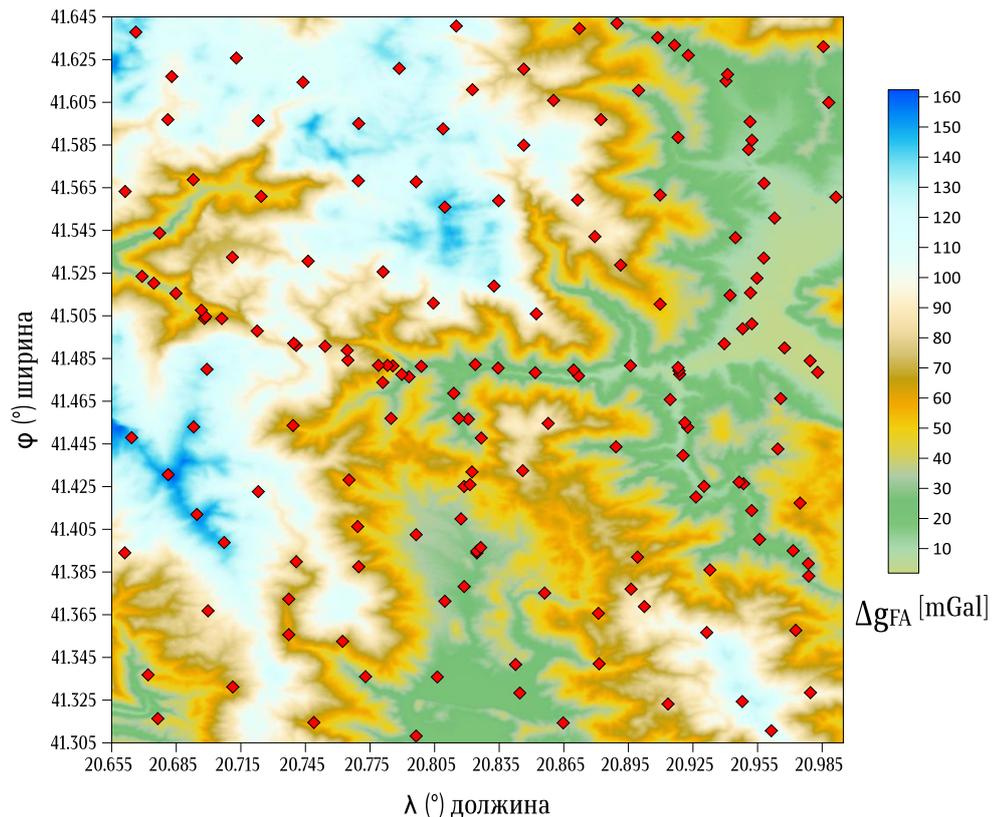
Слика 5.4 Распоред на ГНСС-нивелмански точки

ГНСС-нивелманските точки се дел од седум нивелмански влаци (*L-18, L-19, L-22, L-23, L-24, L-25* и *L-26*). Согласно Слика 5.4 искористени се 2 точки од *L-18*, 9 точки од *L-19*, 9 точки од *L-22*, 8 точки од *L-23*, 3 точки од *L-24*, 7 точки од *L-25* и една точка од *L-26*. Се забележува и празниот простор во одреден дел каде влакот *L-22* треба да се поврзе со влаците *L-23* и *L-24*. Тука отстранет е дел од *L-22*, бидејќи се детектирани груби грешки при нивно користење во валидирањето. Тоа најверојатно се должи на приближното

мерење на елипсоидните висини со ГНСС приемници, како и присуството на густа вегетација околу предметните точки.

#### 5.4 Податоци за аномалии на Земјина тежа

Главните податоци за определување на гравиметриски геоид се терестричките аномалии во слободен воздух  $\Delta g_{FA}$ . За предметното подрачје се искористени мерењата на Земјиното забрзување на 165 точки, кои се редуцирани и претворени во аномалии на Земјина тежа со помош на нормалното забрзување.

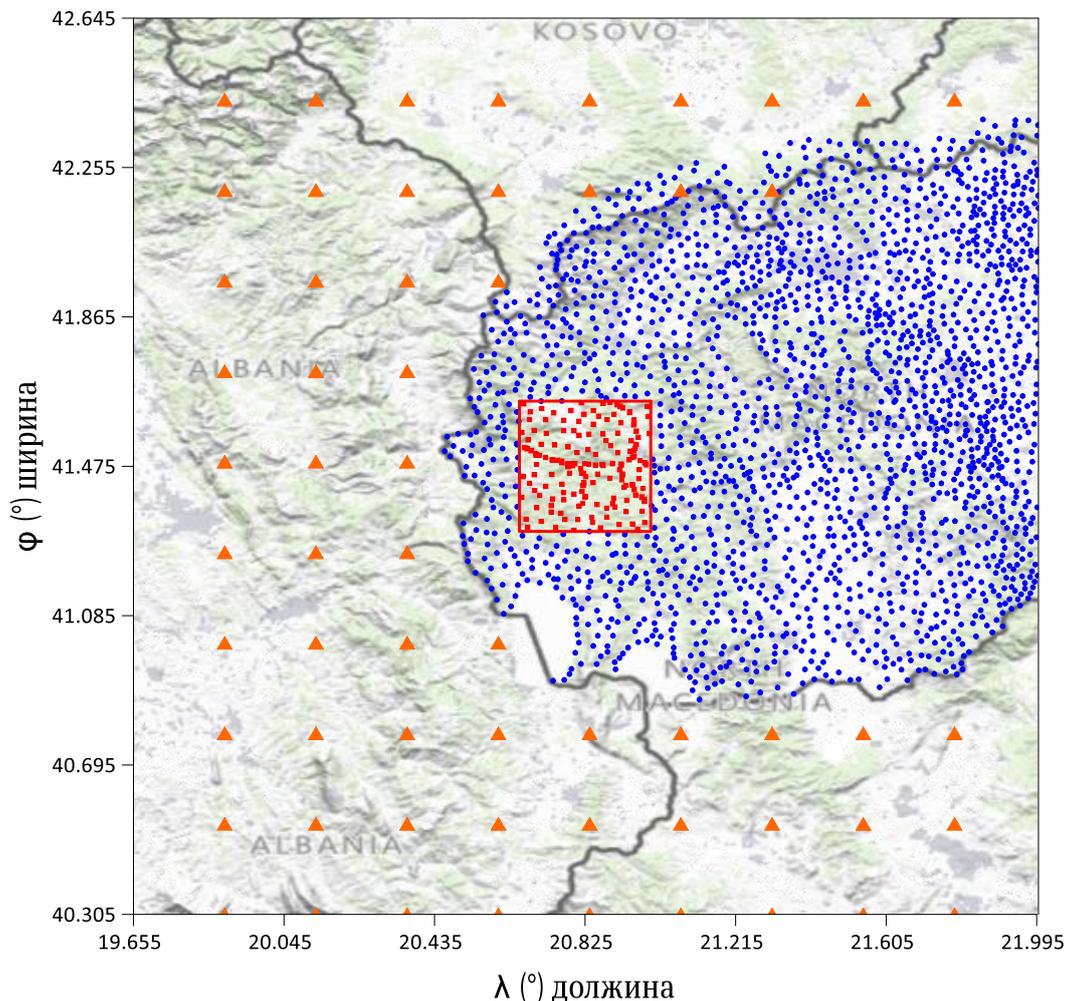


Слика 5.5 Распоред на  $\Delta g_{FA}$  во предметно подрачје

Со црвена боја се означени точките кои ги претставуваат терестричките аномалии во слободен воздух на Слика 5.5. Може да се забележи дека распоредот е претежно хомоген со мали празнини во одредени подрачја. Согласно (Abbak, 2011), препорачливо е да има по 1 точка на  $10 \text{ km}^2$ . Во предметното подрачје густината на точките е  $\approx 6.5 \text{ km}^2$ , што го задоволува основното барање. Самиот квалитет на извршените мерења не е познат, па може да постојат некои грешки кои ќе влијаат на крајните резултати. Се работи за мерења направени пред подолг временски период, па веројатноста за недостатоци постои.

Како што беше објаснето во поглавје 5.1 за потребите на гравиметрискиот геоид, потребно е проширување на предметното подрачје за 1 степен во секоја насока. Со тоа се креира податочното подрачје. Со оглед на потребата од мерења од соседните држави, освен во источниот дел кој е покриен со мерења кои се направени на територија на Република Македонија, остатокот од податочното подрачје ќе биде дополнето со аномалии од глобалниот геопотенцијален модел EGM2008. На следната слика се

прикажани предметното и податочното подрачје заедно, како и мерењата кои се направени заедно со дополнувањата од ГТМ.



Слика 5.6 Распоред на гравиметриски податоци во податочно и предметното подрачје

Од Слика 5.6 може да се забележи дека има три различни сета на податоци: со црвени квадрати се означени точките каде има гравиметриски мерења во рамки на предметното подрачје, со сини кругчиња се означени точките каде има гравиметриски премеј, а се во рамки на податочното подрачје. Со портокалови триаголници се означени податоците кои се превземени од *ICGEM*, а се однесуваат на моделот *EGM2008*. За податоците кои ги превземаме, потребно е да им го одредиме GRID растојанието изразено во лачни степени. Тука доаѓаме до моментот кога треба да се определи резолуцијата на конечните модели на геоид, а која произволно се избира. За предметното подрачје кое зафаќа приближно  $1072 \text{ km}^2$ , избрана е резолуција од  $0.01^\circ \times 0.01^\circ$  ( $36'' \times 36''$ ). Со ваквиот избор се формира GRID мрежа од  $35 \times 35$  GRID полиња. Резолуцијата е најважниот избор пред да се започне со прибирање на податоци, бидејќи сите податоци кои влегуваат во пресметките мораат да имаат исто GRID растојание меѓусебно. Тоа се однесува на ГТМ, ДЕМ и аномалиите. Со оглед на фактот дека аномалиите се добиваат од мерења кои не се изведуваат на идеално меѓусебно растојание, доаѓаме до моментот кога е потребно да направиме интерполација на податоците за да се добие идеална GRID мрежа. Затоа во продолжение ќе бидат направени статистички анализи на интерполациските методи кои беа опишани во поглавје 5.2.

## 5.5 Валидација на методи за интерполација со аномалии на Земјина тежа

Како што беше опишано и претходно, за определување на геоид, потребно е да се дефинираат GRID мрежи на аномалии на Земјина тежа. Постојат повеќе методи кои беа опишани, а се разликуваат меѓусебно во математичкиот модел кој го применуваат за определување на вредности за непознатите точки. Како влезни податоци за проверка на интерполационите методи се аномалии во слободен воздух  $\Delta g_{FA}$  и непотполни Бугеови аномалии  $\Delta g_{SB}$ . Податоците кои се користат се однесуваат на предметното подрачје. Тие што резултираат со најмали грешки во разликите помеѓу вистинските вредности и интерполираните за истите предметни точки, ќе се користат во пресметките на геоидни модели. Тоа се прави со бришење на точка чија вредност е позната и за истата да се добие интерполирана вредност и да се направи споредба со вистинската. Практично, тоа што е показател за точноста на еден метод е крос-валидацијата на разликите и  $RMSE$  со кои резултираат. Целта е да се изврши оценка на точноста на методите и да се определат кои даваат најмал  $RMSE$ , а кои најголеми.

Сите методи се разликуваат во однос на влезните параметри кои се дефинираат априори на пресметките, а се прикажани во Табела 5.2:

Табела 5.2 Влезни параметри на методи за интерполација

Интерполационски метод	Параметри
Cokriging	Тип (едноставен, обичен, традиционален), вредности на точки или блокови, радиуси на интерполација
Inverse Distance to a Power	Power (колку брзо степенот на доверба се намалува со растојанието), Smoothing (недоверба во влезните податоци, поголема вредност, помало влијание на одредено мерење на соседните точки)
Kriging	Drift (линеарен или квадратен), тип (точки или блокови), вариограм
Local Polynomial	Power (влијание на околните податоци), ред на полиномна функција,
Minimum Curvature	Број на итерации, фактор на релаксација (поголема вредност значи побрза конвергенција на алгоритмот), внатрешна и гранична тензија (поголеми вредности го прават GRIDот пораман помеѓу мерните точки)
Modified Shepard's Method	Smoothing (вредности меѓу 0 и 1), број на соседни точки за пресметка на вредности, број на соседни точки за пресметка на тежини обработнопропорционални на растојанието од мерната точка
Moving Average	Број на соседни точки за определување на вредности за јазолните точки, радиус по Y и X оската за дефинирање на јазолни точки
Natural Neighbor	Анизотропија (сооднос и агол)
Nearest Neighbor	Радиуси на елипсата за пребарување на соседни точки
Polynomial Regression	Тип на површина, ред на X, Y и вкупен ред на полиномот

Radial Basis Function	Тип на функција, фактор за поглатка површина
Triangulation with Linear Interpolation	Анизотропија (сооднос и агол)

Со оглед на поголемиот број на влезни параметри кои влијаат на исходот за оцената на точност од разликите, бројот на комбинации е доста голем, пред се на бројот на точки за кои се врши крос-валидацијата. Определувањето е направено преку менување на секој од параметрите се додека не се добие минимални вредности за *STD* и *RMSE* за секоја од методите. Вредностите за оценката на точност е прикажана за аномалиите во слободен воздух, каде методите се подредени од оној што покажува најмала *RMSE*, па се до тој со најголема грешка. Резултатите се дефинирани во табелата што следи:

Табела 5.3 Точност на интерполација на различни методи за  $\Delta g_{FA}$ , мерни единици [mGal]

Интерполациски метод	Минимум	Максимум	Средина	<i>STD</i>	<i>RMSE</i>
Minimum Curvature	-42.2	53.5	0.6	10.9	10.8
Kriging	-41.1	50.7	-0.8	15.4	14.8
Trian. Linear Interpolation	-86.9	68.4	-0.6	18.3	18.2
Natural Neighbor	-62.9	55.4	-0.5	18.4	18.3
Radial Basis Function	-80.7	53.9	-1.2	18.7	18.7
Modified Shepard's Method	-62.2	65.7	-1.8	20.6	20.6
Cokriging	-69.3	54.4	0.4	22.4	22.3
Local Polynomial	-87.8	52.9	0.5	22.7	22.6
Nearest Neighbor	-93.9	75.1	-2.2	25.2	25.2
Inverse Distance to a Power	-74.4	52.5	-6.4	26.9	27.6
Polynomial Regression	-111.8	86.9	0.1	40.5	40.4
Moving Average	-99.1	66.2	-1.0	43.9	43.8

Од Табела 5.3 се забележуваат неколку работи: методите Minimum Curvature и Kriging резултираат со најмали грешки, додека пак Polynomial Regression и Moving Average се со најголеми грешки и како такви треба да не се земаат воопшто во предвид при интерполирање. Останатите методи се дефинирани со вредности од 18.2 mGal до 27.6 mGal. Слична анализа околу интерполирањето следи во Табела 5.4, каде се искористени непотполните Бугеови аномалии за интерполација:

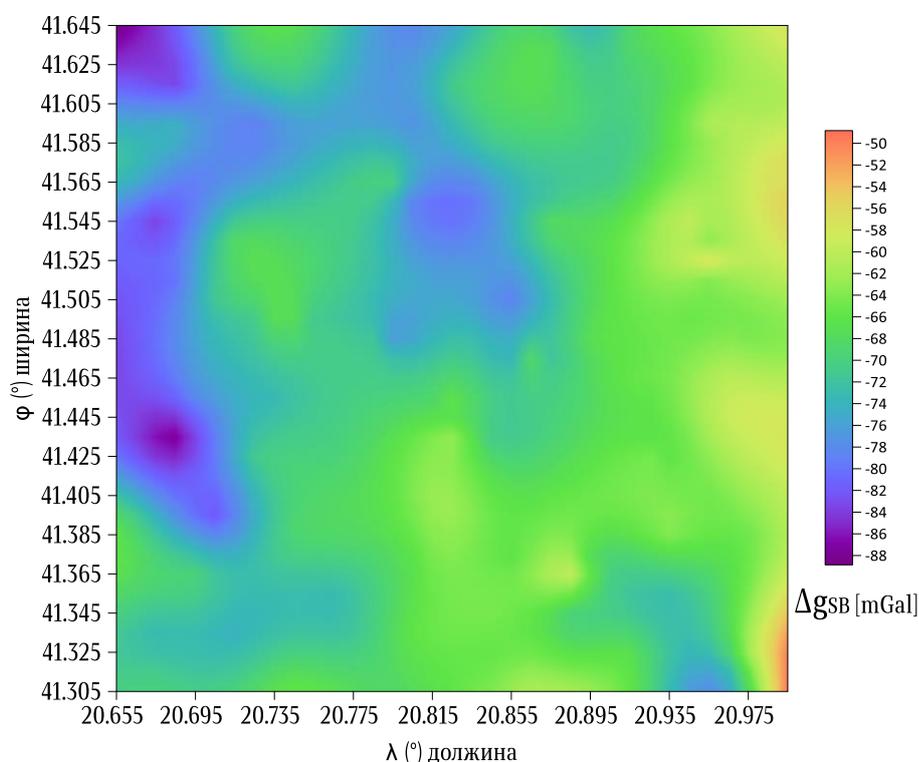
Табела 5.4 Точност на интерполација на различни методи за  $\Delta g_{SB}$ , мерни единици [mGal]

Интерполациски метод	Минимум	Максимум	Средина	<i>STD</i>	<i>RMSE</i>
Minimum Curvature	-6.2	5.8	0.1	1.7	1.7
Trian. Linear Interpolation	-8.6	8.8	0.0	2.9	2.9
Natural Neighbor	-7.9	9.4	0.1	2.9	2.9
Kriging	-10.2	7.3	0.0	3.1	3.1
Modified Shepard's Method	-12.4	9.0	0.0	3.1	3.1
Inverse Distance to a Power	-7.9	10.3	0.4	3.1	3.1
Local Polynomial	-12.7	8.6	-0.1	3.2	3.2
Radial Basis Function	-10.8	8.8	-0.1	3.5	3.5
Cokriging	-8.3	8.5	-0.2	3.6	3.6
Nearest Neighbor	-12.6	9.8	-0.3	3.9	3.9
Polynomial Regression	-7.2	12.0	0.0	3.9	3.9
Moving Average	-10.7	16.1	0.1	4.9	4.9

Со добиените резултати, најмала грешка се добива при користење на методот Minimum Curvature која изнесува 1.7 mGal. Следните шест методи во Табела 5.4 се

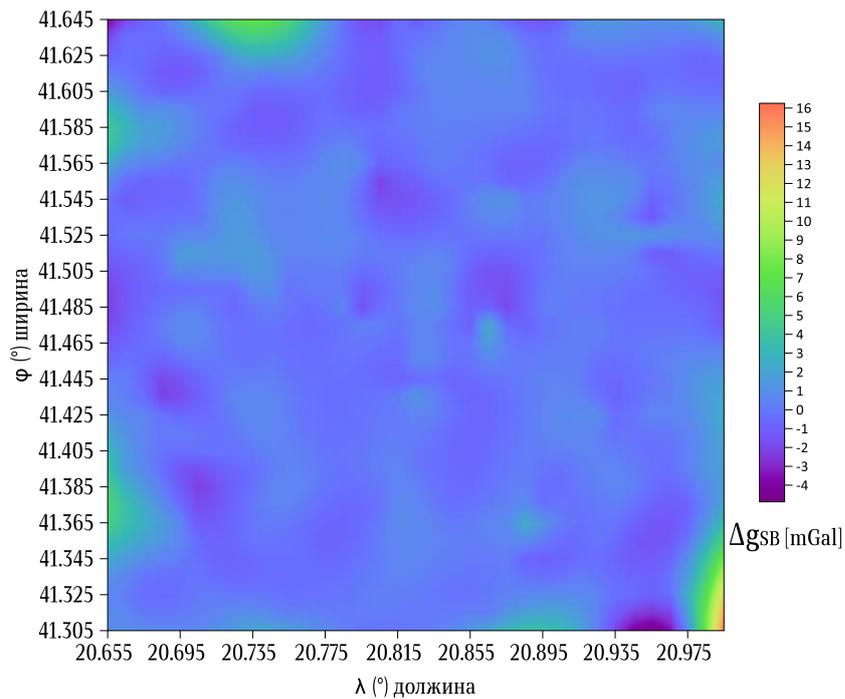
карактеризираат со грешки од 2.9 до 3.2 mGal. Со грешки поголеми од 3.5 mGal се дефинираат последните пет методи во табелата и како такви не треба да се користат при интерполација. Со споредба на двете табели се потврдува дека  $\Delta g_{SB}$  се подобри во интерполирањето, затоа што повеќето методи имаат грешка помала од 3.5 mGal. Со тоа се заклучува дека непотполните Бугеови аномалии се поглатки и се понезависни од методот на интерполација. За нив и средините од разликите скоро кај сите методи се еднакви на нула. Од друга страна,  $\Delta g_{FA}$  се карактеризираат со поголеми разлики во вредностите, па затоа и не се користат во интерполацијата.

Во пресметувањата кои следат, мерењата се претвораат во непотполни Бугеови аномалии со изразот (3.15), се врши интерполација и потоа повторно се враќаат во аномалии во слободен воздух при дефинитивните пресметки на гравиметрискиот геоид. Во поглед на времетраењето на интерполација, најдолго трае Minimum Curvature, поради големиот број на итерации, без оглед на типот на податоци кој се користи.



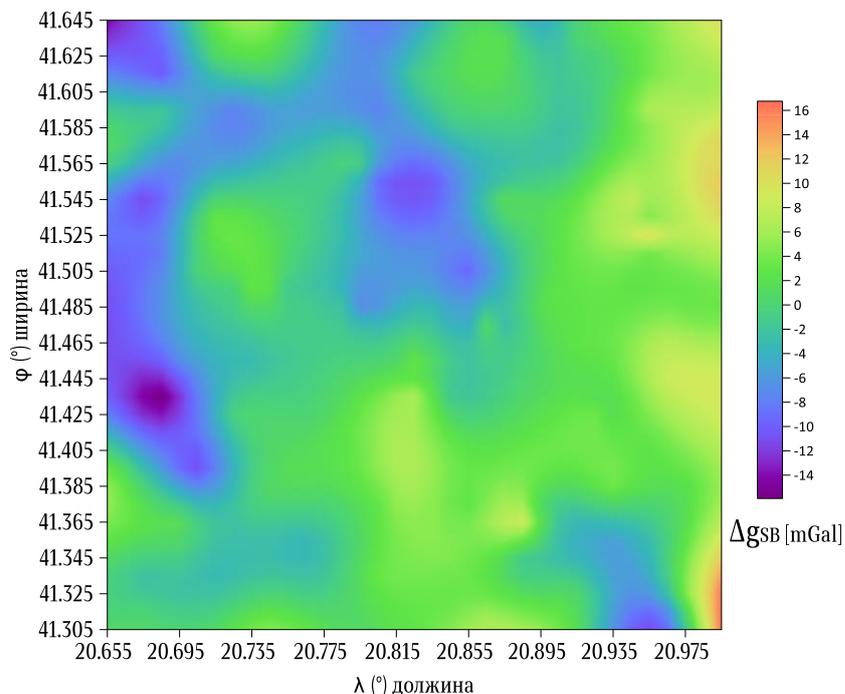
Слика 5.7 Интерполирани непотполни Бугеови аномалии со Min. Curvature

На Слика 5.7 се прикажани интерполираните  $\Delta g_{SB}$  со методот Minimum Curvature, кој се карактеризира со најмала грешка при интерполирање. Може да се забележи дека вредностите се движат од -88 до -55 mGal. Претежно вредностите се движат  $\approx -65$  mGal во источниот и јужниот дел од предметното подрачје. Крајната вредност од -50 mGal се достигнува во југоисточниот дел. Од друга страна, најниски вредности се добиваат во средишниот дел, западниот и северозападниот дел, каде теренот е највисок во планинските предели. Во продолжение ќе следат прикази на интерполирани разлики помеѓу најточниот метод и останатите методи за  $\Delta g_{SB}$ .



Слика 5.8 Разлика на непотполни Бугеови аномалии со Min. Curvature и Kriging, мерни единици [mGal]

Од Слика 5.8 може да се забележи дека разлики помеѓу најточниот метод и Kriging методот се движат од -4 до +16 mGal. Вредностите за средината е 0.2 mGal, додека пак *STD* и *RMSE* имаат идентична вредност од 1.4 mGal. Иако интервалот на разлики е 20 mGal, сепак согласно приказот може да се заклучи дека најголемиот дел од разликите се движат околу 0 до -1 mGal, што укажува на фактот дека и Kriging методата може да се искористи за интерполација.



Слика 5.9 Разлика на непотполни Бугеови аномалии со Min. Curvature и Moving Average, мерни единици [mGal]

На Слика 5.9 се прикажани разликите меѓу најточната и најмалку точната метода. Вредностите на разликите се движат од -4 до 16 mGal, слично како и на претходниот приказ. Сепак од сликата може да се забележи дека поголемиот дел од разликите се движат помеѓу 8 и 12 mGal. Разликите се карактеризираат со  $STD=5$  mGal и  $RMSE=4.9$  mGal, со што се докажува дека Moving Average не може да се користи како интерполациона метода.

### 5.6 Валидација на глобални геопотенцијални модели

Глобалните геопотенцијални модели имаат најголемо влијание при определувањето на гравиметрискиот геоид. Како што беше опишано во поглавје 4.3.1 тие се архивираат од страна на ICGEM и се добиваат како листа на хармониски коефициенти ( $\bar{C}_{nm}$ ,  $\bar{S}_{nm}$ ) придружени со нивните грешки ( $\sigma_C$ ,  $\sigma_S$ ). Коефициентите и грешките се бездимензионални големини. Параметрите според кои е направен изборот на ГГМ што се користат во пресметките. Исто така, беа подетално опишани моделите, со нивните карактеристики и максималните степен и ред на експанзија. Во ова поглавје преминуваме кон подетално, практично анализирање на избраните модели. Анализите можат да бидат спектрални и просторни.

Спектралните анализи се однесуваат на проверки на хармониските коефициенти и нивните грешки, со што се пресметува колку се веродостојни тие податоци за секој од користените модели. Исто така, покрај внатрешните, апсолутни анализи на моделите, направена е и релативна анализа на два модели преку нивните коефициенти и грешки (Tsoulis & Patlakis, 2013), (Ustun & Abbak, 2010).

Просторните анализи се однесуваат на три посебни споредби на ГГМ со ГНСС-нивелманските податоци, со аномалиите на Земјина тежа и преку различни степени на експанзија. Пресметките за валидација се направени во неколку чекори:

- Статистичка анализа на  $\delta N$  и  $\delta \Delta g$  со користење на максимален степен на експанзија за моделите.

$$\delta N = N_{\text{ГНСС-нивелман}} - N_{\text{ГГМ}} \quad (5.3)$$

и

$$\delta \Delta g = \Delta g_{\text{терестрички}} - \Delta g_{\text{ГГМ}} \quad (5.4)$$

каде

$$N_{\text{ГНСС-нивелман}} = h - H \quad (5.5)$$

каде  $h$  е елипсоидна висина на точката и  $H$  е ортометричка висина на точката.  $N_{\text{ГГМ}}$  се добива со изразот (4.12),  $\Delta g_{\text{терестрички}}$  се однесува на аномалиите во слободен воздух кои се добиваат со изразот (3.14) и  $\Delta g_{\text{ГГМ}}$  кои се добиваат со изразот (4.11).

- Графичка анализа на разликите како функции од повеќе променливи (геодетска ширина, геодетска должина, геоидни ундулации, ортометрички висини, аномалии во слободен воздух, непотполни Бугеови аномалии);
- Графичка анализа на  $STD$  дефинирана со израз (5.2) со користење на различен максимален степен на експанзија на ГГМ.

Слични анализи се направени во повеќе трудови, а некои од нив се: оценка на точност за *GOCE* модели над територија на Турција, кои покажале унапредување на пресметките на геоид за 15% (Erol *et al.*, 2020), евалуација на комбинирани *ГГМ* во Виетнам (Pham *et al.*, 2023), валидација на *ГГМ* со користење на аномалии на Земјина тежа во Полска (Godah *et al.*, 2018), оценка на комбинирани *ГГМ* над територија на Кенија со 55 *ГНСС*-нивемлански точки (Nyoka *et al.*, 2022) и валидација над територија на Кувајт (El-Ashqer *et al.*, 2020).

Максималниот степен на експанзија на моделите е важен, бидејќи ја определува просторна резолуција на моделот преку изразот:

$$\psi_{min} = \frac{\pi R}{n_{max}} \approx \frac{20000 \text{ км}}{n_{max}} \quad (5.6)$$

каде  $\psi_{min}$  е резолуцијата изразена во километри (таа претставува најкратката полу-бранова должина на полето на Земјина тежа) на модел со  $n_{max}$  параметри  $C_{nm}$  и  $S_{nm}$  и  $R$  е Земјин радиус. Пример за пресметани просторни резолуции во однос на максимален степен на експанзија е прикажан во Табела 5.5:

Табела 5.5 Влијание на  $n_{max}$  на *ГГМ* во однос на просторна резолуција

Максимален степен на експанзија $n_{max}$	Просторна резолуција [km]
30	667
70	286
100	200
160	125
220	91
260	76
300	67

Изборот на максимален степен на експанзија е една од најважните одлуки при определување на геоидот. Иако согласно равенката за пресметка на просторната резолуција, поголем степен значи поголема резолуција, сепак поголемите степени се оптоварени со грешки на повисоките хармониски коефициенти. Тоа значи дека во определени регионални подрачја можат да се појават грешки што ќе влијаат на дефинитивните геоидни ундулации. Затоа е неопходна претходна евалуација на моделите пред нивно локално имплементирање. Подетални анализи во поглед на резолуцијата се направени во поглавје 5.6.4.

### 5.6.1 Спектрална анализа

Прва од анализите кои се прават за *ГГМ* е спектрална евалуација на моделите. Причината поради која се прави е фактот дека сите модели се карактеризираат со грешки дефинирани за различните хармониски коефициенти. Спектралната анализа може да ја поделиме на два методи кои се користат најчесто:

- Евалуација базирана на коефициентите и нивните *STD* грешки;
- Релативна евалуација базирана на разлики во коефициентите или грешките помеѓу два *ГГМ* модели.

Првиот метод има свои лимитирачки можности кои се должат на доменот, резолуцијата на моделот, типот на податоци и сл. Овој метод е познат како внатрешна анализа во релативна смисла, затоа што ги користи коефициентите и грешките кои се добиени со методата на израмнување на најмали квадрати.

Вториот метод се базира на споредба на коефициентите за исти степен и ред на различни модели. Тоа е важно во ситуација кога ГТМ е добиен од различни мисии или начинот на нивно конструирање е различен. Таков е случај во овој докторски труд, каде користените модели се добиени со различни мисии и нивни комбинации.

Двата методи кои се користат се со цел да се провери конзистентноста на коефициентите и грешките за различни модели.

- **Апсолутна анализа на ГТМ**

Со првиот метод се прави директна, апсолутна валидација на коефициентите (*signal degree variance*) и на грешките (*error degree variance*). Изразот според кој се пресметува јачината на спектрумот на коефициентите до одреден степен  $n$  е дефиниран според Рап (Rapp, 1982):

$$c_n^2 = \sum_{m=0}^n (\bar{c}_{nm}^2 + \bar{s}_{nm}^2) \quad (5.7)$$

На сличен начин е дефиниран и изразот со кој се дефинира варијансата на грешките од хармониските коефициенти:

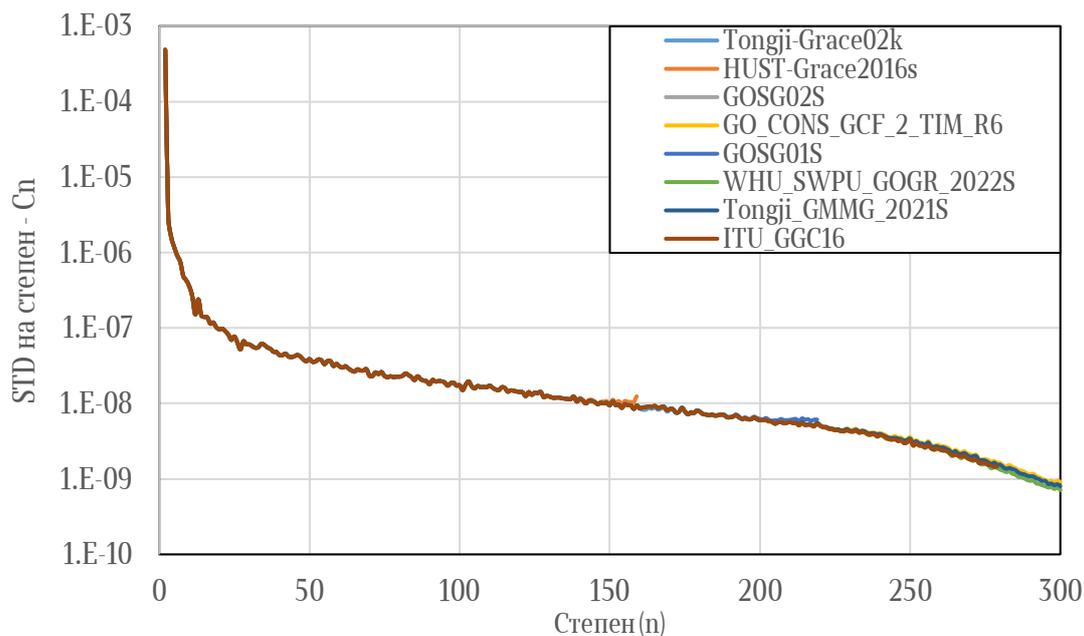
$$\sigma_n^2 = \sum_{m=0}^n (\sigma_{c_{nm}}^2 + \sigma_{s_{nm}}^2) \quad (5.8)$$

Во изразот (5.7) се користат хармониските коефициенти, а во изразот (5.8) се користат стандардните девијации на коефициентите. Сите четири вредности се зададени во .gfc документите кои се проследуваат за секој ГТМ.

Со двата изрази се дефинираат варијансите за кои беше објаснето дека се квадрати на стандардните девијации. Сепак во графичките прилози кои следат ќе бидат дефинирани вредностите на *STD*.

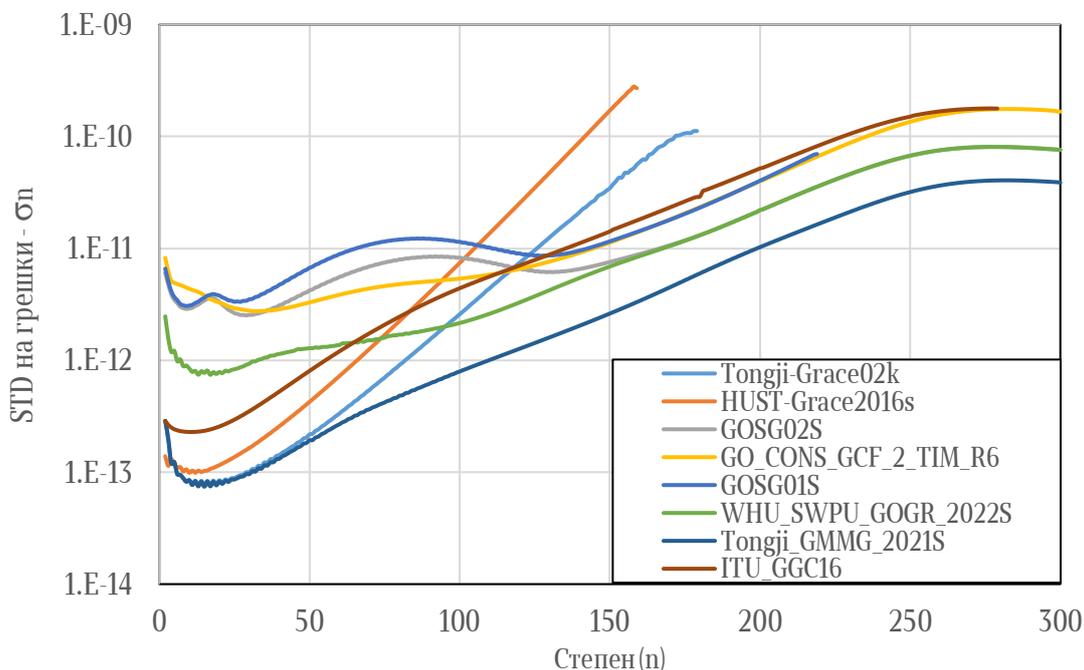
На Слика 5.10 е прикажан графиконот со кој се дефинираат *STD* за коефициентите до максималниот степен на експанзија на ГТМ. Од прикажаното може да се извлече заклучокот дека генерално сите осум модели имаат приближно ист тренд кога станува збор за коефициентите со кои се дефинирани. Првично вредностите се движат од  $10^{-3}$  до  $10^{-7}$  од степен 2 до степен 50.

Потоа трендот добива поблаг наклон, но со постојано намалување на вредностите. Моделите кои имаат помали максимални степени на експанзија имаат слични вредности за нивниот максимален степен со оние кои се со максимален степен  $n_{max} = 300$ . За степен 300, минимални вредности има моделот *WHU\_SWPU\_GOGR\_2022S*.



Слика 5.10 Стандардна девијација на коефициенти за ГТМ модели

На Слика 5.11 се прикажани стандардните девијации за грешките на хармониските коефициенти. Може да се забележи дека *GRACE* моделите имаат сличен тренд со зголемување на степените на експанзија.



Слика 5.11 Стандардна девијација на грешки за ГТМ модели

Од *GOCE* моделите најмали вредности достигнува *GOSG02S*. Од комбинираните модели на некој начин има постојано паралелно движење низ степените со разлики приближни на  $10^{-1}$ , со фактот дека моделот *Tongji\_GMMG2021S* има постојана помала вредност на *STD* во однос на сите останати модели. Почетното однесување на сите грешки

е слично за моделите, а константни вредности се достигнуваат после степен 250 кои се движат од  $10^{-9}$  па се до  $10^{-10}$  како конечна вредност за повеќето од нив.

Покрај апсолутните валидации, исто така значајни се и релативните валидации помеѓу моделите, каде еден модел е усвоен како референтен во однос на кој се прават сите анализи. За овој труд тоа ќе биде моделот *GOSG02S*.

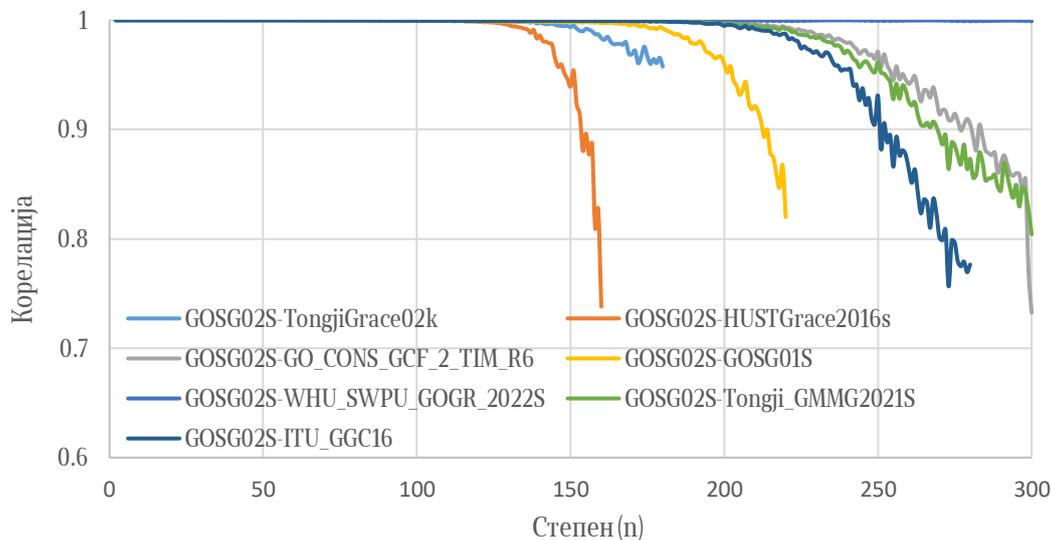
• Релативна анализа на ГТМ

Вториот метод за проверка на ГТМ е со помош на релативни големини. Со нив се добиваат сознанија за соодносот на коефициентите и грешките помеѓу моделите.

Прва големина е корелацијата дефинирана со изразот:

$$\rho_n = \frac{\sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}^A \bar{C}_{nm}^B + \bar{S}_{nm}^A \bar{S}_{nm}^B)}{\sqrt{\sigma_n^2(\bar{C}_{nm}^A, \bar{S}_{nm}^A) \sigma_n^2(\bar{C}_{nm}^B, \bar{S}_{nm}^B)}} \quad (5.9)$$

каде  $(\bar{C}_{nm}^A, \bar{S}_{nm}^A)$  и  $(\bar{C}_{nm}^B, \bar{S}_{nm}^B)$  се целосно нормализирани сферни хармониски коефициенти за референтниот модел и тој кој што се евалуира во однос на него, како и  $\sigma_n^2(\bar{C}_{nm}^A, \bar{S}_{nm}^A)$  и  $\sigma_n^2(\bar{C}_{nm}^B, \bar{S}_{nm}^B)$  кои претставуваат варијанси на грешките од моделите. Со индекс А се означува референтниот модел, а со индекс В се означува моделот за кој се прави проценка. Со корелација во однос на степените се овозможува нумеричка анализа при директна споредба на два модела. Сепак, оваа големина не може во целост да го прикаже совпаѓањето или разликите меѓу нив. Вредноста на оваа големина може да се движи од 0 до 1. Постојат ситуации во кои има висока корелација, а двата модела се разликуваат според факторот на размер.



Слика 5.12 Корелација на коефициенти, референтен модел *GOSG02S*

За графиконот на корелација, референтен модел е *GOSG02S* кој се карактеризира со  $n_{max} = 300$ . Може да се заклучи дека корелацијата е доста солидна помеѓу моделите, со максимални вредности 1 и со минимални вредности од 0.73. Скоро по сите степени корелацијата помеѓу *GOSG02S* и *WHU\_SWPU\_GOGR\_2022S* има вредност 1. Од друга страна, скоро кај сите модели чии максимални степени се помали од 300, имаат корелација 1 до степен (120 до 150), па потоа истата се намалува. За *HUSTGRACE2016s* вредноста брзо паѓа до 0.73 (степен 120-160). Кај *GOSG01S* тоа се случува после степен 160, па се до 220 кога

вредноста е 0.82. Слични трендови имаат комбинираните модели *Tongji\_GMMG2021S* и *ITU\_GGC16* со намалување на корелацијата после степен 200, па до максималниот степен 300 достигнуваат вредности околу 0.81 и 0.77, соодветно. Најголема разлика во коефициентите се појавуваат кај моделот *GO\_CONS\_GCF\_2\_TIM\_R6*, чија корелација е слична како комбинираните модели, но достигнува минимална вредност во степен 300 (0.73).

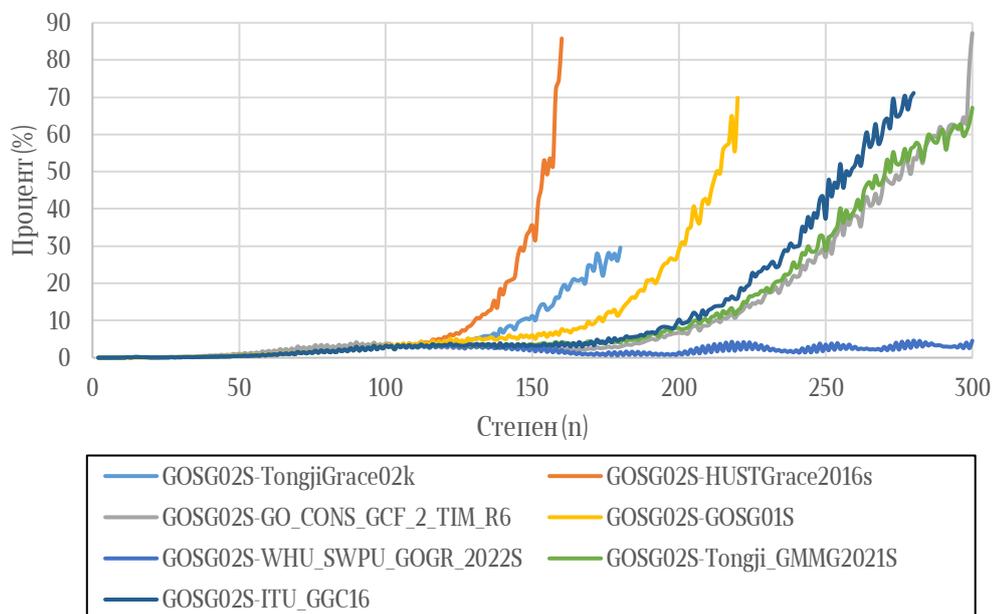
Понатака, се воведува втора големина која се нарекува *smoothing* (изгладување по степен) која е дефинирана со изразот (Tscherning, 1985):

$$S_n = \frac{\sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm}^2 + \Delta \bar{S}_{nm}^2)}{\sigma_n^2 (\bar{C}_{nm}^A, \bar{S}_{nm}^A)} \quad (5.10)$$

каде  $\Delta \bar{C}_{nm}^2, \Delta \bar{S}_{nm}^2$  се квадрати од разликите на коефициентите на модел В со модел А. Во именителот на изразот се наоѓа варијанса на грешките од модел А.

Сепак, за графичко прикажување се воведува и трета големина која служи за компаративна анализа. Тоа е процентот на разлики до одреден степен дефиниран со изразот:

$$P_n = \left[ \frac{\sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm}^2 + \Delta \bar{S}_{nm}^2)}{\sigma_n^2 (\bar{C}_{nm}^A, \bar{S}_{nm}^A)} \right]^{1-2} * 100 \quad (5.11)$$



Слика 5.13 Процентуална корелација на коефициенти, референтен модел *GOSG02S*

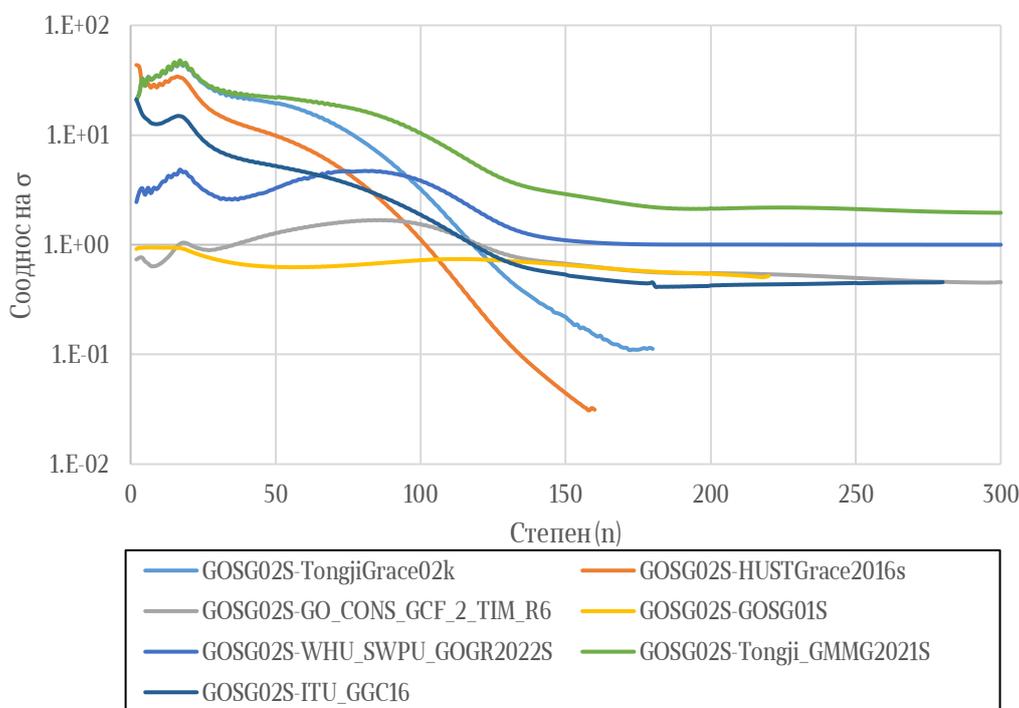
На Слика 5.13 е прикажано глаткоста (*smoothing*) низ проценти. Со оваа големина може да се дефинираат разликите меѓу моделите во вид на проценти на одреден степен во однос на средната квадратна грешка на референтниот модел. Моделите имаат проценти од 0 до 10 до степен 120. Тоа значи добро совпаѓање помеѓу нив. Потоа најмала разлика има моделот *TongjiGRACE02k* со максимална вредност од 30%. Три модели: *GOSG01S*, *ITU\_GGC16* и *Tongji\_GMMG2021S* имаат сличен тренд на совпаѓање, со максимални

разлики од 60-70% при нивните максимални степени на експанзија. Екстремни вредности на несовапаѓање имаат моделите *HUSTGRACE2016s* и *GO\_CONS\_GCF\_2\_TIM\_R6* од речиси 90%. Најконстантна вредност има моделот *WHU\_SWPU\_GOGR\_2022S* кој речиси на секој степен има вредности меѓу 0 и 5%, што го прави доста близок до референтниот модел.

Како последна големина за релативна анализа е т.н. *gain* (сооднос на *STD* помеѓу два модела до одреден степен). Со оваа големина се определува степенот до кој точноста на коефициентите на вториот модел е подобра од првиот модел. Таа е дефинирана со изразот (Sneeuw, 2000):

$$g_n = \frac{\sigma_n^A}{\sigma_n^B} \quad (5.12)$$

каде во броителот стои *STD* на референтниот модел, а во именител на моделот за кој се прави пресметката.



Слика 5.14 Сооднос на *STD*, референтен модел *GOSG02S*

На Слика 5.14 може да се забележи како се однесуваат моделите во однос на референтниот модел кога станува збор за соодносот на нивните средни квадратни грешки со кои се карактеризираат. Можат да се забележат дека резултатите од соодносите кореспондираат со изнесените заклучоци околу процентуалното совпаѓање на моделите. Колку се вредностите поблиски до 1, толку има помала разлика помеѓу грешките на моделите (степен на несигурност). Од графиконот се забележува дека екстремни вредности достигнуваат моделите *HUSTGRACE2016s* и *TongjiGRACE02k*. Подобри вредности имаат моделите *GOSG01S* и *Tongji\_GMMG2021S*, додека пак вредности речиси еднакви на 1 после степен 150 има моделот *WHU\_SWPU\_GOGR2022S*.

## 5.6.2 Валидација со ГНСС-нивелман

Следна валидација на ГГМ е со ГНСС-нивелмански точки кои беа опишани во поглавје 5.3. Станува збор за 46 точки на кои ќе бидат пресметани геоидни ундулации од ГГМ и од ГНСС-нивелманот, а потоа дефинирани и разликите согласно изразот (5.3). Пресметувањето на средината и *STD* за разликите е целта на ова поглавје. Геоидните ундулации добиени од ГГМ се до максимален степен на експанзија за сите модели. После евалуацијата на сите модели, се претставени и како се движат вредностите на разликите во однос на други променливи (геоидни ундулации, ортометриски висини, геодетска ширина, геодетска должина, аномалии во слободен воздух, непотполни Бугеови аномалии).

Првата споредба која се прави е директна, без никакво израмнување (*no-fit*):

Табела 5.6 Споредба на ГГМ со ГНСС-нивелман, *no-fit*, мерни единици [cm]

Име на модел	Минимум	Максимум	Средина	<i>STD</i>
<i>GOSG02S</i>	-39.9	39.6	10.9	21.2
<i>WHU-SWPU-GOGR2022S</i>	-40.7	38.7	10.0	21.2
<i>Tongji-GMMG2021S</i>	-48.2	32.0	2.9	21.3
<i>GOSG01S</i>	-62.5	15.9	-11.6	21.6
<i>GO_CONS_GCF_2_TIM_R6</i>	-41.4	41.0	11.0	22.1
<i>ITU_GGC16</i>	-59.5	23.8	-6.6	22.2
<i>HUST-GRACE2016s</i>	-174.4	-82.8	-118.1	25.2
<i>Tongji-GRACE02k</i>	-105.5	2.9	-38.9	30.1

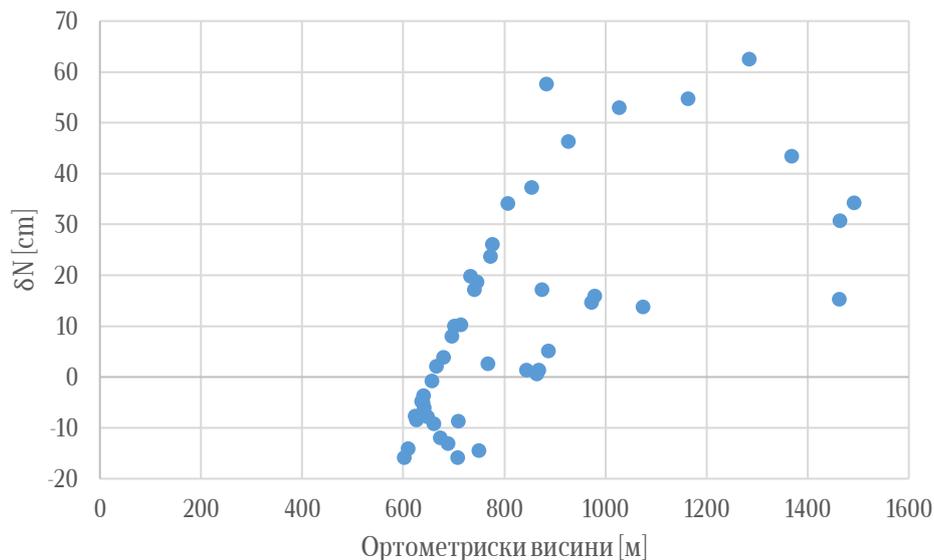
Од споредбата во Табела 5.6 може да се заклучи дека сите модели отстапуваат од ГНСС-нивелманските вредности на ундулациите, со максимална грешка за моделот *Tongji-GRACE02k* (30.06 cm) и *HUST-GRACE2016s* (25.22 cm). Интересно е да се напомене дека овие два модели се добиени само од *GRACE* мисијата. Од друга страна, моделот кој се карактеризира со најмала грешка е *GOSG02S* (21.20 cm) кој е добиен само со *GOCE* мисијата. За останатите модели грешките имаат слични вредности со најголема дискрепанца од 1.1 cm (*ITU\_GGC16*). Може да се забележи дека директната споредба без израмнување резултира со големи систематски грешки (големи вредности за средините) кај сите модели. Тоа значи дека треба да се имплементира одредено параметарско израмнување (3 параметри, 4 параметри, 5 параметри, 7 параметри) опишани во поглавје 4.2. Израмнувања кои генерираат најдобри резултати се 4 и 5 параметарските, па затоа во продолжение е прикажана статистиката од нивната примена кај сите ГГМ.

Табела 5.7 Споредба на ГГМ со ГНСС-нивелман, мерни единици [cm]

Име на модел	4 параметарски				5 параметарски			
	Мин.	Макс.	Средина	<i>STD</i>	Мин.	Макс.	Средина	<i>STD</i>
<i>Tongji-GRACE02k</i>	-17.1	19.5	0.0	6.5	-17.2	20.4	0.0	6.4
<i>HUST-GRACE2016s</i>	-17.1	19.7	0.0	6.6	-17.1	20.7	0.0	6.5
<i>GOSG02S</i>	-17.2	19.7	0.0	6.4	-17.2	20.4	0.0	6.5
<i>GO_CONS_GCF_2_TIM_R6</i>	-17.2	19.5	0.0	6.4	-17.2	20.3	0.0	6.4
<i>GOSG01S</i>	-17.2	20.3	0.0	6.4	-17.2	20.5	0.0	6.5
<i>WHU-SWPU-GOGR2022S</i>	-17.1	19.7	0.0	6.4	-17.2	20.4	0.0	6.4
<i>Tongji-GMMG2021S</i>	-17.2	20.0	0.0	6.5	-17.2	20.7	0.0	6.5
<i>ITU_GGC16</i>	-17.1	19.6	0.0	6.4	-17.2	20.3	0.0	6.4

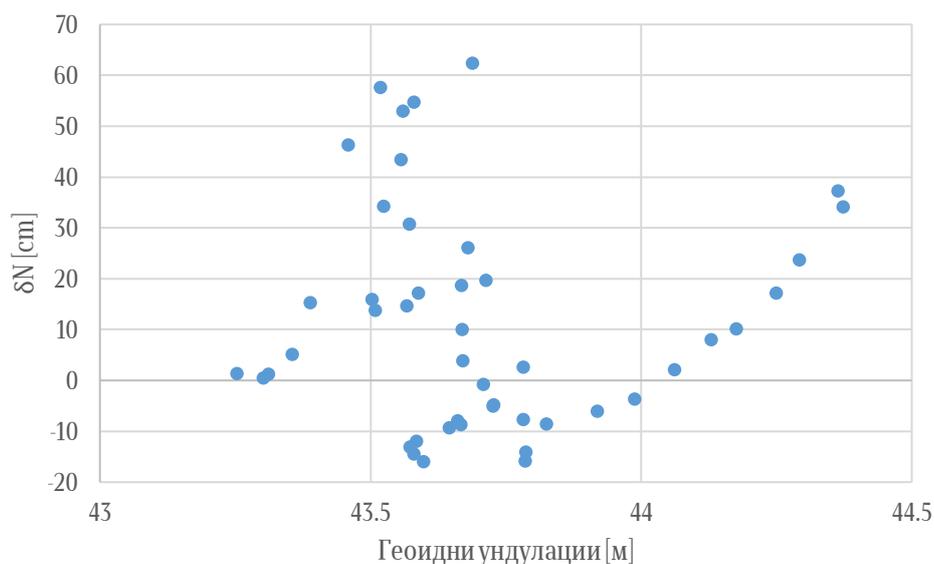
Се забележува дека сите модели после користење на параметарски израмнувања со 4 и 5 параметри, добиваат слични вредности за  $STD$ . Практично, со отстранување на средините од сите разлики,  $RMS=STD$ . Вредностите изнесуваат 6.4 или 6.5 cm за сите модели. Вредностите за минимум се скоро идентични при двете споредби -17.1 или -17.2 cm, додека пак максимумот на 5 параметарското израмнување е за 1 cm поголемо речиси кај сите модели во однос на 4 параметарскиот максимум.

Во продолжение следат графикони за однесувањето на разликите  $\delta N$  (*no-fit*) во однос на различни променливи.



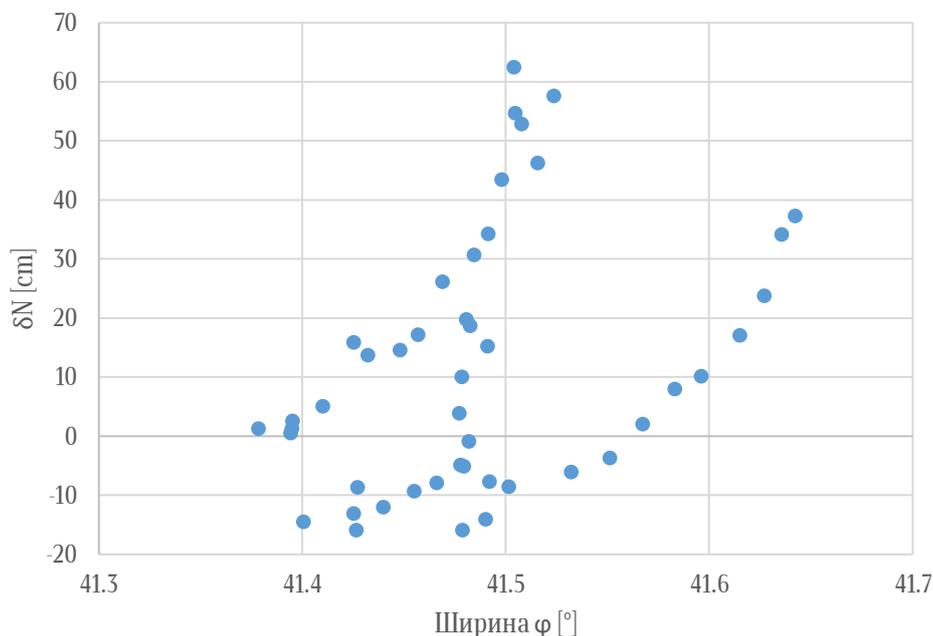
Слика 5.15 Разликите  $\delta N$  како функција од ортометриски висини

Од Слика 5.15 се забележува дека разликите се во интервал од -20 до 10 cm за приближни ортометриски висини од 600 до 1000 m. За висини над 1000 m, разликите се зголемуваат во интервал од 30 до 65 cm. Тоа значи дека ундулациите се директно зависни од ортометриските висини.



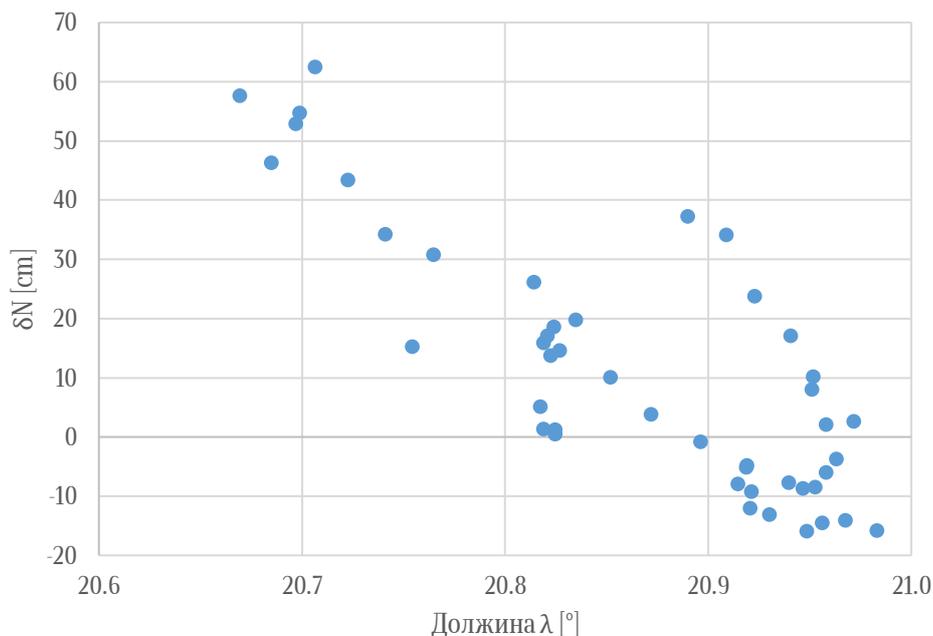
Слика 5.16 Разликите  $\delta N$  како функција од геоидни ундулации

На графиконот од Слика 5.16 се забележува дека разликите не се зависни од геоидните ундулации, затоа што на пр. за ундулации која варираат од 43.5 до 44 m имаме вредности на разликите од -20 до 64 cm.



Слика 5.17 Разликите  $\delta N$  како функција од геодегска ширина

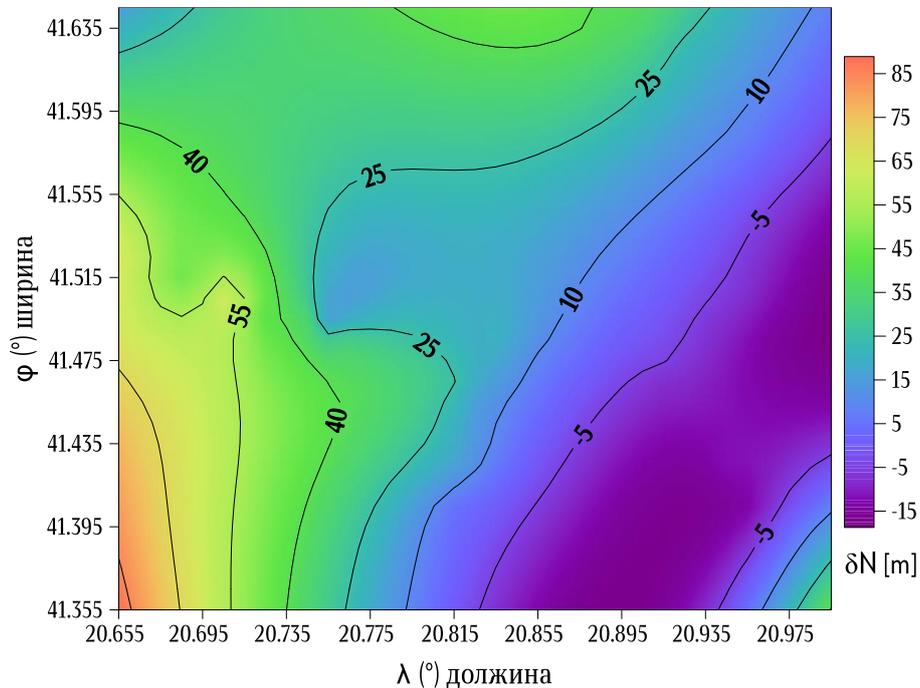
При споредба на разликите во однос на геодегската ширина, може да се забележи слична поставеност на вредностите за разликите како и кај претходниот графикон, при споредбата со геоидните ундулации. Исто така, нема посебна корелација, затоа што вредностите на разликите варираат од -20 до 65 cm за  $41.4^\circ < \varphi < 41.6^\circ$ .



Слика 5.18 Разликите  $\delta N$  како функција од геодегска должина



На последниот графикон се гледа зависноста на  $\delta N$  од  $\Delta g_{SB}$ . Практично вредностите на  $\Delta g_{SB}$  се движат од -80 до -60 mGal. Зависноста на  $\delta N$  може да ја поделиме на два дела: еден дел има вредности од -16 до 30 cm за  $-70 < \Delta g_{SB} < -60$  mGal. За вредности помали до -80 mGal и разликите се зголемуваат со достигнување 64 cm.



Слика 5.21 Интерполирани разлики  $\delta N$ , модел GOSG02S

Од Слика 5.21 која ги претставува интерполираните разлики на геоидните ундулации  $\delta N$  може да се заклучи дека помали вредности има во пределот каде се наоѓаат ГНСС-нивелманските точки. Генерално, разликите се движат од -15 до 40 cm. Екстремни вредности достигнуваат во повисоките предели (југозападно и северозападно) каде нема покриеност со ГНСС точки. Вредностите достигнуваат и до 85 cm разлики.

### 5.6.3 Валидација со аномалии на Земјина тежа

Втората просторна анализа е споредба на терестричките аномалии во слободен воздух со оние добиени од ГГМ. Се користи изразот (5.4) за дефинирање на разликите. Разликите се однесуваат на 165 точки каде има гравиметриски премер во рамки на предметното подрачје. Од пресметките се дефинира Табела 5.8:

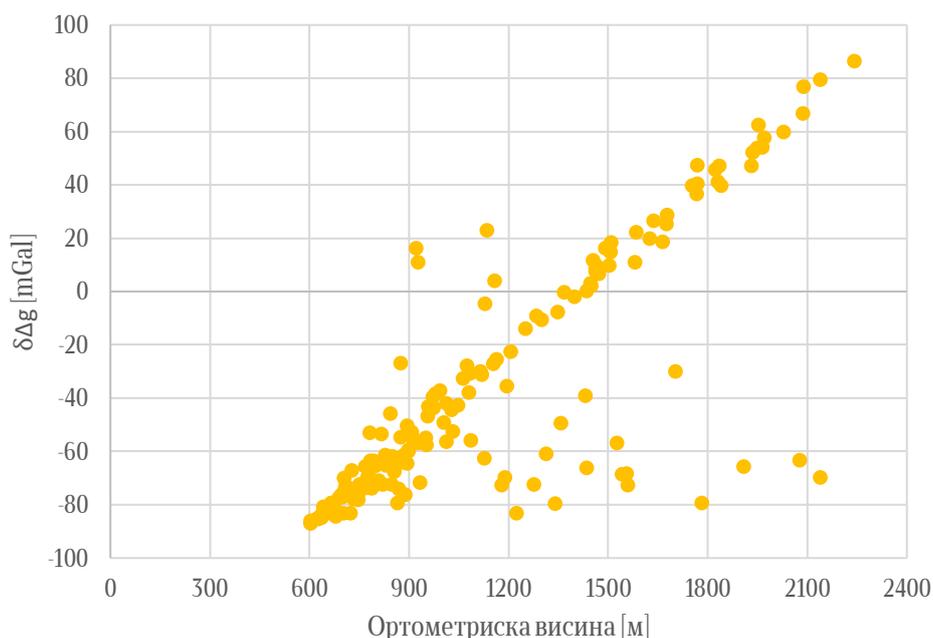
Табела 5.8 Споредба на  $\Delta g_{FA}$  со ГГМ, *no-fit*, мерни единици [mGal]

Име на модел	Минимум	Максимум	Средина	STD
GOSG02S	-60.6	112.9	26.5	46.9
WHU-SWPU-GOGR2022S	-60.6	112.9	26.5	46.9
GOSG01S	-58.8	109.1	16.8	47
Tongji-GMMG2021S	-60.5	111.9	24.2	47
GO_CONS_GCF_2_TIM_R6	-61.2	113.8	27.2	47.2
ITU_GGC16	-61.1	113.2	18.9	47.2
HUST-GRACE2016s	-62.8	114.2	-13.1	47.6
Tongji-GRACE02k	-64.6	116.1	7.4	48.4

Може да се заклучи дека вредностите за минимум и максимум се слични за сите модели. Минимална вредност има *GOSG01S*, додека пак максимална има моделот *Tongji-GRACE02k*. Средната вредноста е најмала за *Tongji-GRACE02k*, а најголема за *GO\_CONS\_GCF\_2\_TIM\_R6*, по апсолутна вредност и за двата. Како краен параметар за тоа колку е моделот соодветствува на терестричките аномалии во слободен воздух е *STD*, која за два модели е идентична. Тоа се *GOSG02S* и *WHU-SWPU-GOGR2022S* со грешка од 46.9 mGal. После нив следат останатите со вредности кои се движат од 47 до 47.6 mGal. Најголема грешка има моделот *Tongji-GRACE02k*.

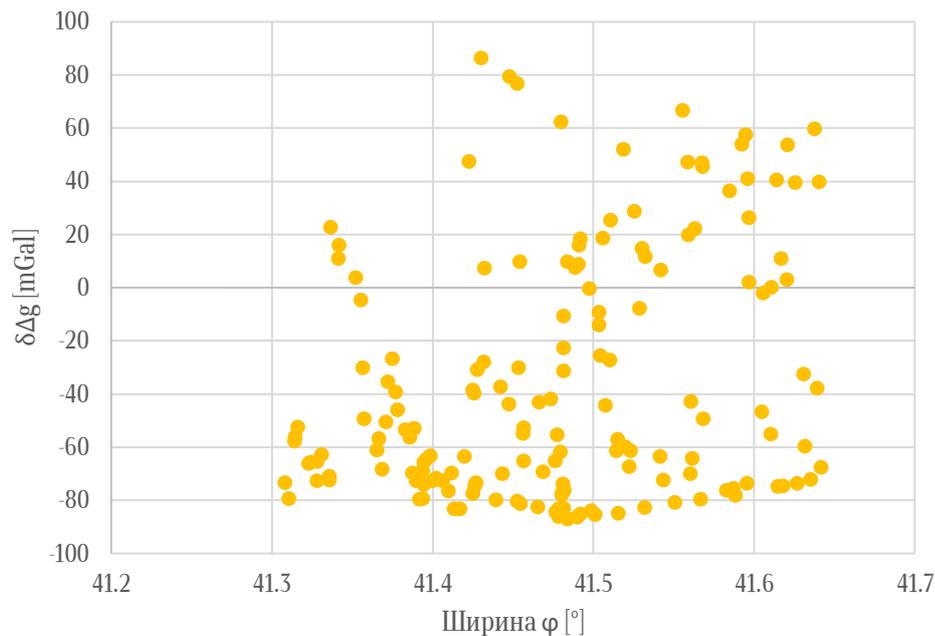
Може да се каже дека овие вредности соодветствуваат на некои од спектралните анализи кои беа направени претходно. Речиси идентични вредности се добиваат за *GOSG02S* и *WHU-SWPU-GOGR2022S* при споредување на моделите со *ГНС*-нивелман и со аномалии на Земјина тежа. Од друга страна, во двата случаи се потврдува дека најголема грешка генерира моделот *Tongji-GRACE02k*. Интересен е фактот дека најдобрите модели се определени само со *GOCE* и комбинирана (*GOCE+GRACE*) мисија, а најлошиот е дефиниран само со мерења од *GRACE* мисијата.

Во продолжение ќе бидат прикажани графиконите за соодносот на разликите со повеќе променливи, слично како што е направена споредба на  $\delta N$  во однос на променливи. За разликите ќе биде користен моделот *GOSG02S*, бидејќи има најмала *STD* вредност од сите модели. Може да се заклучи дека при анализирање на  $\delta N$  и  $\delta \Delta g$  се добиваат слични статистики за сите модели.

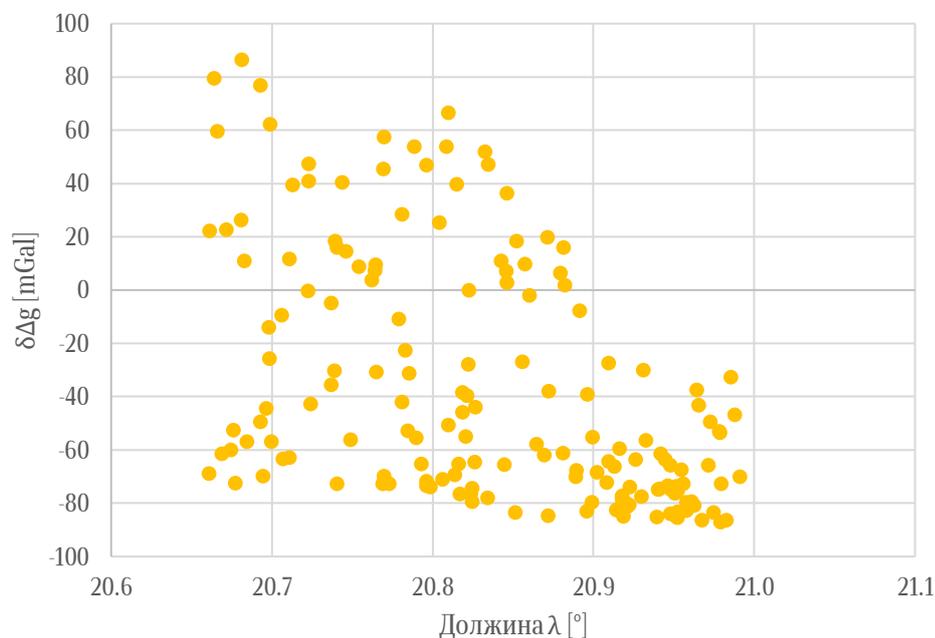


Слика 5.22  $\delta \Delta g$  како функција од ортометриски висини

Вредностите варираат од -90 до 90 mGal за разликите. Погolem број од разликите се однесуваат на просторот помеѓу 600 и 900 m со вредности од -85 до -55 mGal. Се забележува дека со зголемување на ортометриската висина, се зголемуваат и разликите, речиси линеарно. Максимални вредности на разликите од околу 85 mGal се достигнуваат на висина од 2100 m.

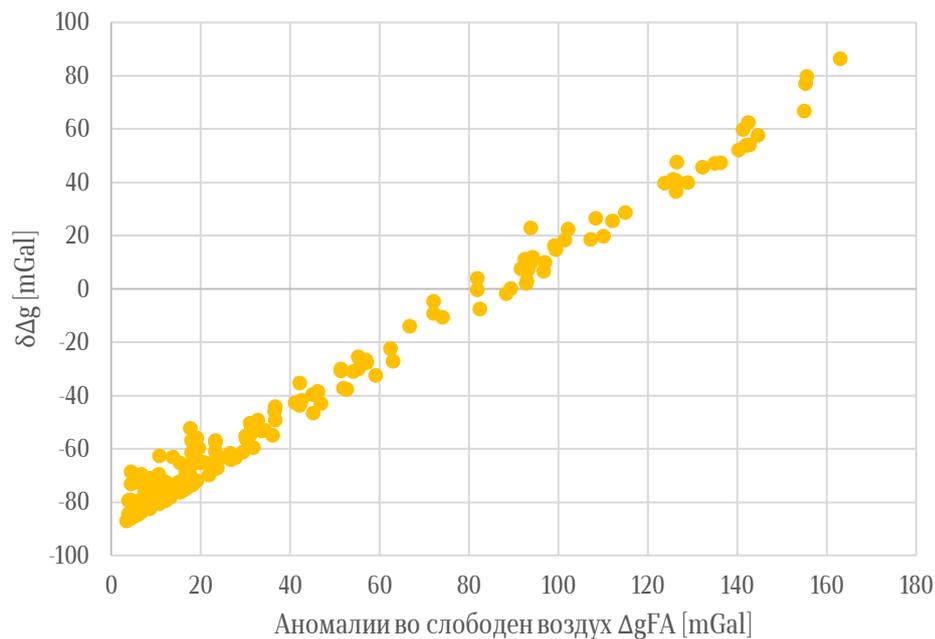
Слика 5.23  $\delta\Delta g$  како функција од геодетска ширина

Во функција од геодетската ширина, нема посебна законитост на разликите, затоа што движејќи се по паралелите, теренот се менува од рамничарски до планински. Не постои континуитет согласно ширината во предметното подрачје. Затоа и резултатите од разликите се присутни со различни вредности за иста ширина.

Слика 5.24  $\delta\Delta g$  како функција од геодетска должина

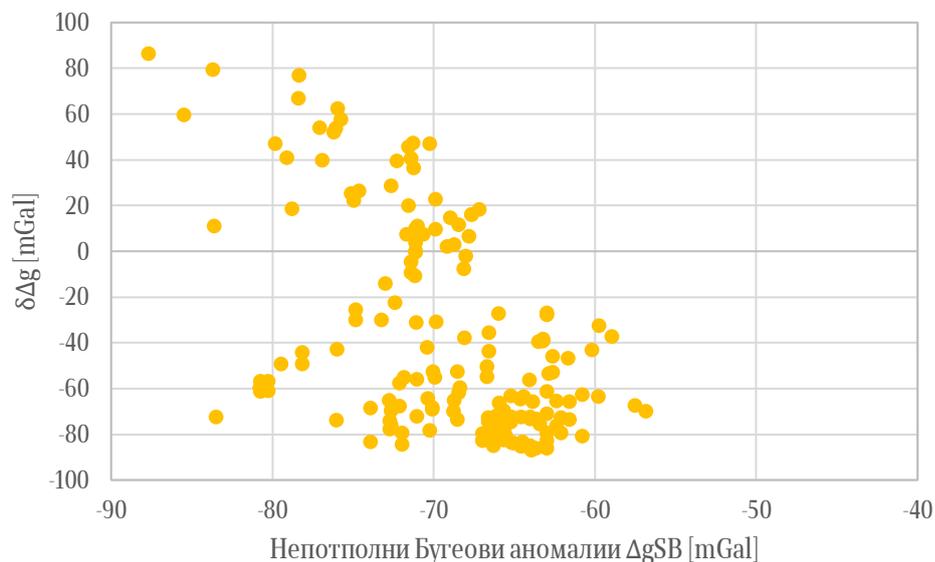
Генерално и кај разликите во однос на геодетската должина не постои одреден континуитет. За пределот од  $20.9^\circ$  до  $21^\circ$  разликите се од  $-85$  до  $-35$  mGal. Како што се оди на запад од предметното подрачје, некои од разликите се намалуваат, претежно се работи за оние кои се наоѓаат околу градот Кичево. Слично и кај Слика 5.18 и тука зависноста се

гледа низ вредностите блиски до нула во пределот што е рамнински и каде што постои и ГНС-нивелмански премер.



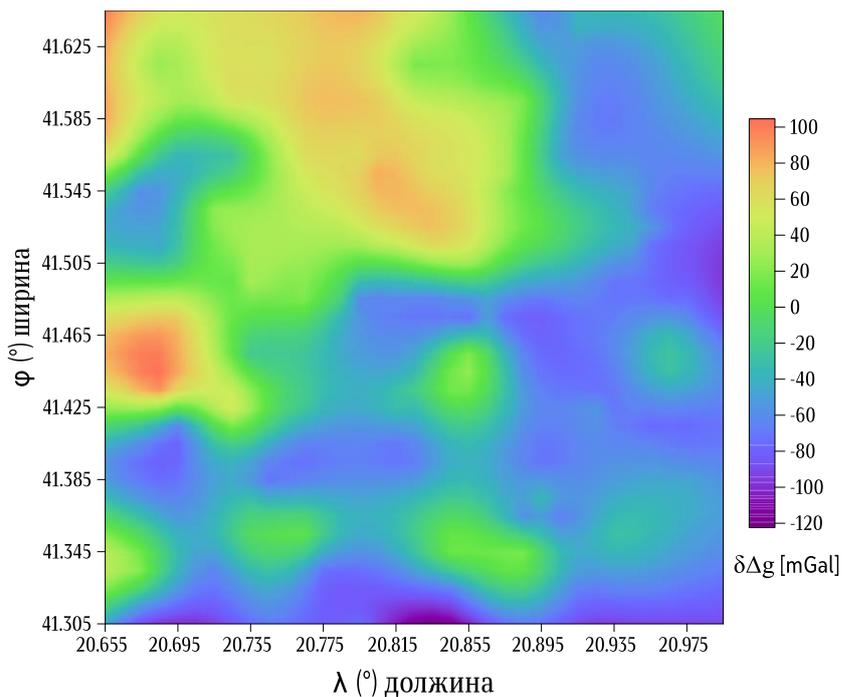
Слика 5.25  $\delta\Delta g$  како функција од аномалии во слободен воздух

На Слика 5.25 е прикажано однесувањето на разликите во однос на аномалиите во слободен воздух. Интересен е изгледот на графиконот каде разликите формираат речиси права линија. Вредностите се движат од  $-90 \text{ mGal}$  за  $\Delta g_{FA} = 0 \text{ mGal}$ , преку  $0 \text{ mGal}$  за  $\Delta g_{FA} = 80 \text{ mGal}$ , па се до  $90 \text{ mGal}$  за  $\Delta g_{FA} = 165 \text{ mGal}$ .



Слика 5.26  $\delta\Delta g$  како функција од непотполни Бугеови аномалии

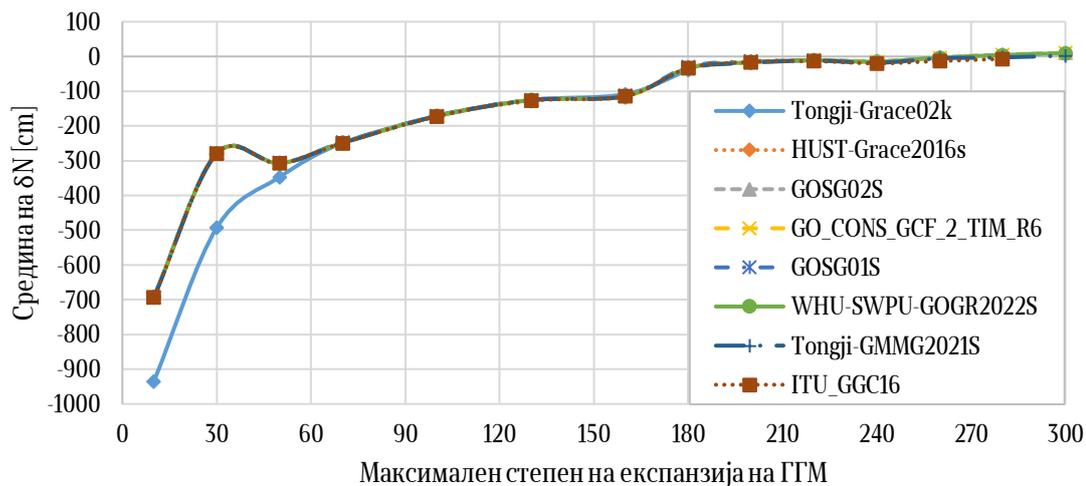
При оваа компарација, се забележува сличен тренд како на Слика 5.20. При аномалии од  $-60$  до  $-80 \text{ mGal}$ , вредностите на разликите се движат од  $-90$  до  $0 \text{ mGal}$ . Со поголеми негативни вредности за аномалиите, се зголемуваат и разликите.

Слика 5.27 Интерполирани разлики на аномалии  $\delta\Delta g$ , модел *GOSG02S*

Може да се забележи од сликата дека вредностите на разликите зависат од вредностите на ортометриските висини, во најголема мера. Во пониските предели тие се блиски до нула или се негативни, а во планинските предели во северозападниот дел и каде што нема *ГНСС* точки, тие ги достигнуваат максималните вредности.

#### 5.6.4 Валидација со максимален степен на експанзија

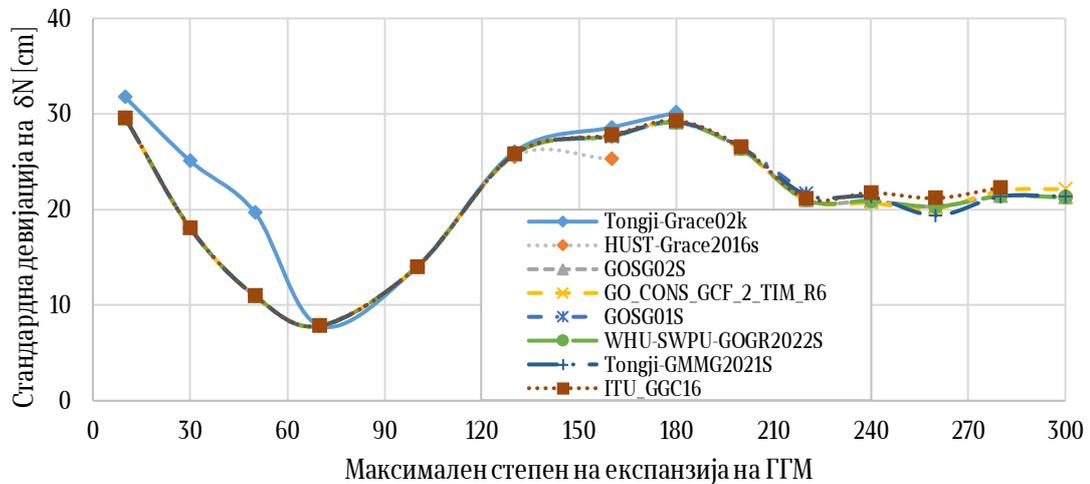
Третата валидација на *ГТМ* е во поглед на степенот на експанзија. Практично, се прави валидација преку разликите  $\delta N$ .  $N_{ГТМ}$  се пресметуваат за различен  $n_{max} = 10, 30, 50, \dots, 240, 260, 280, 300$ . За сите разлики се пресметани средини и *STD*.



Слика 5.28 Средина на разлики со различен степен на експанзија

Од графиконот се забележува дека за степен  $10 < n_{max} < 150$ , средината се движи од -693 cm до -113 cm. Со зголемување на максималниот степен на моделите, се намалува средината. Отстапка е само моделот *Tongji-GRACE02k*, кој има средини од -935 cm за

степен  $n_{max} = 10$ . Вредностите на овој модел за средините се приближуваат кон останатите модели после степен 70. После  $n_{max} = 220$ , сите модели конвергираат кон исти средни вредности. Минималната вредност за средината ја достигнува моделот *GOSG02S* за  $n_{max} = 260$ .



Слика 5.29 Стандардна девијација со различен степен на експанзија

Од графиконот се гледа дека за степен  $10 < n_{max} < 70$ , вредноста на *STD* се намалува од 30 cm до 8 cm. Понатака, при  $70 < n_{max} < 180$  вредностите на грешката растат, достигнувајќи 28 cm. Стандардната девијација опаѓа до степен  $n_{max} = 220$ , кога вредностите стануваат константни околу 21 cm. После степен 300, грешката се движи помеѓу 20 и 22 cm.

## 5.7 Валидација на дигитални теренски модели

Покрај *ГТМ*, на валидација подлежат и *ДЕМ* со цел да се провери нивниот сооднос со предметното подрачје. Анализите се прават со помош на нивелманските и гравиметриските точки:

- Се користат 46 нивелмански точки чии ортометриски висини се добиени на класичен начин со геометриски нивелман. Суштината е да се определат разликите на висините од нивелманскиот премер и висините добиени од *ДЕМ* за исти точки преку изразот. За висините од *ДЕМ* потребно е да се искористи интерполација (во овој случај *IDW*, која беше опишана во поглавје 5.2). Со оглед на фактот дека постојат разлики во висинските датуми, повторно ќе се имплементираат одредени параметарски израмнувања на разликите. Изразот за пресметување на разликите е:

$$\delta H = H_{\text{нивелман}} - H_{\text{ДЕМ}} \quad (5.13)$$

- Втората анализа е споредба на вредностите за аномалиите во слободен воздух каде висините се добиваат од четирите *ДЕМ* (*SRTM*, *ASTER*, *MERIT* и *TANDEM-X*). За втората анализа се користат 165 точки од гравиметрискиот премер. Разликите се добиваат со изразот:

$$\delta\Delta g_{\text{ДЕМ}} = \Delta g_{\text{модел 1}} - \Delta g_{\text{модел 2}} \quad (5.14)$$

Во двата случаи, оценката на точност се прави преку споредба на средините и средната квадратна грешка на разликите, слично како и при евалуацијата на ГГМ.

### 5.7.1 Валидација на ДЕМ со нивелмански точки

Прва е валидацијата на моделите во однос на точките каде се добиени ортометриски висини на класичен начин. Се користи изразот (5.13) за дефинирање на разликите. Статистиката за разликите е прикажана во Табела 5.9:

Табела 5.9 Споредба на ДЕМ со нивелмански точки, *no-fit*, мерни единици [m]

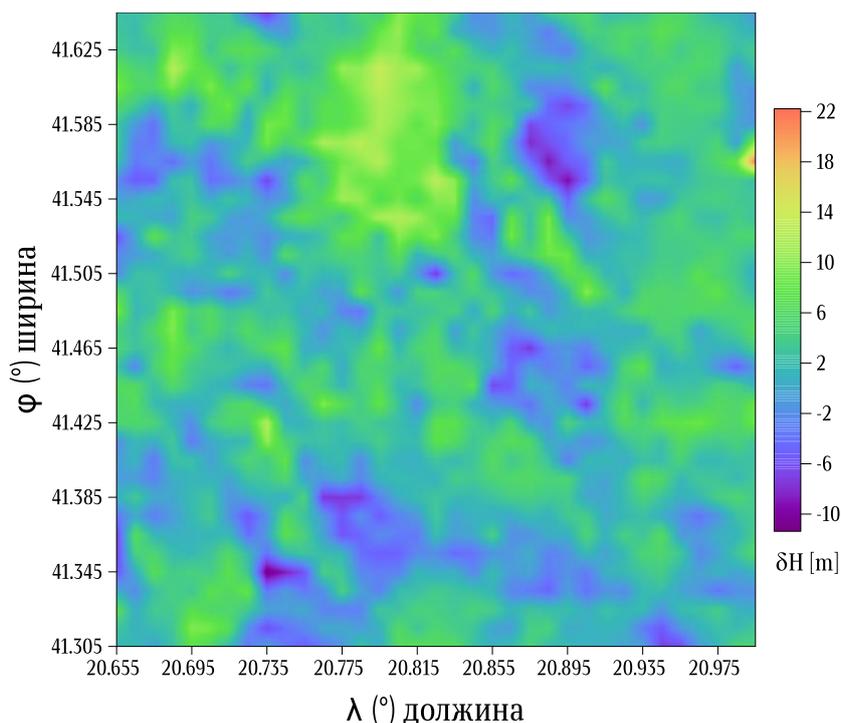
Име на модел	Минимум	Максимум	Средина	STD
<i>MERIT</i>	-148.75	72.01	68.3	58.5
<i>TANDEM-X</i>	-151.4	77.7	72.7	59.4
<i>SRTM</i>	-139.2	112.3	79.6	62.6
<i>ASTER</i>	-140.2	110.7	76.6	62.9

Сепак, помеѓу ДЕМ моделите и нивелманските точки постои разлика во вертикалниот датум. Датумите за ДЕМ беа прикажани во Табела 4.5, додека пак датумот на нивелманските точки беше опишан во поглавје 4.3.4. Тие разлики, слично како и при споредбата на ГГМ со ГНСС-нивелман подлежат на вметнување на корекциски површини, односно параметарско израмнување со кое се добива споредба ослободена од датумските разлики.

Табела 5.10 Споредба на ДЕМ со нивелмански точки, 4 параметри, мерни единици [m]

Име на модел	Минимум	Максимум	Средина	STD
<i>MERIT</i>	-131.3	93.3	1.45	57.5
<i>TANDEM-X</i>	-136.2	92.6	-1.9	58.1
<i>SRTM</i>	-130.9	134.7	-1.5	60.5
<i>ASTER</i>	-131.5	134.3	0.1	60.5

За сите модели пред да се изврши споредување со ортометриските висини, направено е осреднување во рамки на предметното подрачје. Се користат т.н. мали “прозорци” во рамки на  $1^\circ \times 1^\circ$  блокови, при GRID резолуција од  $0.01^\circ \times 0.01^\circ$  со користење на 1369 точки за пресметка на средините. Бројот на точки што се користи за пресметка на една висина зависи од избраната резолуција. Во овој случај таа е  $36''$ , па следи формулата за пресметка  $N = (\text{резолуција}'' + 1)^2$ . Пресметката на средините се прави со цел да се избегнат дополнително грешките кои произлегле од несовершена аквизиција на висинските податоци. Можните извори на грешки беа подетално објаснети во поглавје 4.3.2.

Слика 5.30 Интерполирани разлики на моделите *SRTM-ASTER*

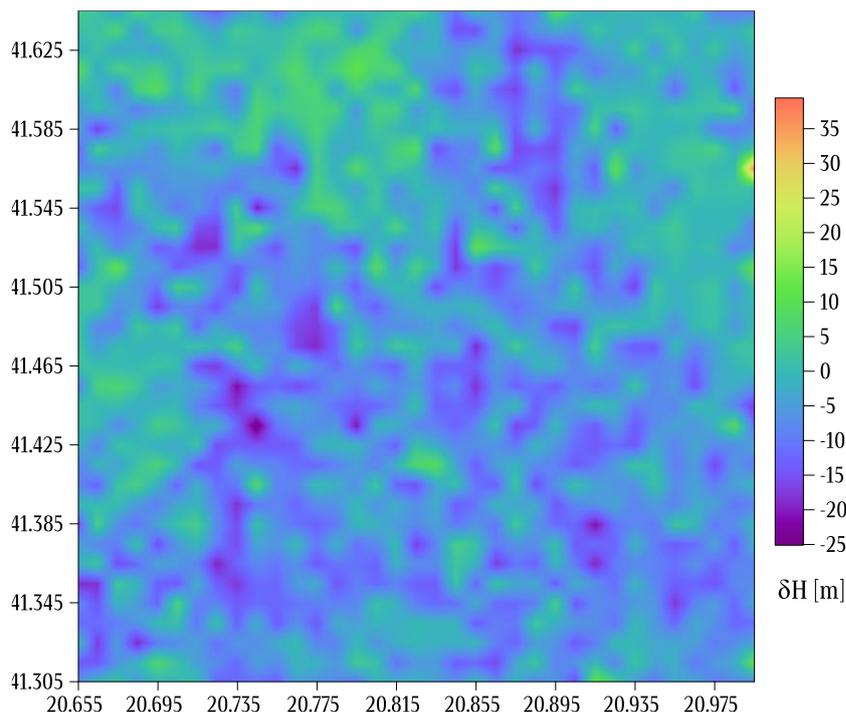
Со валидирање на моделите се добива дека моделот *MERIT* резултира со најмала грешка од 58.5 m (*no-fit*) и 57.5 m (*4 параметри*). Тоа би значело дека тој е моделот кој треба да се користи при дефинирањето на геоидот. Сепак, ако се погледнат и другите три модели, се забележува дека разликата меѓу нив не е многу голема. Максимално се разликуваат *MERIT-ASTER* (3.4 m при *no-fit*) и (3.0 m при *4 параметри*). Заклучокот е дека генерално сите модели имаат слични вредности за средините и средната квадратна грешка.

Покрај споредбата со нивелманските точки, направена е меѓусебна споредба на моделите. Резултатите се прикажани во Табела 5.11. На Слика 5.30 се прикажани интерполираните разлики помеѓу моделите *SRTM* и *ASTER*.

Табела 5.11 Разлики на *ДЕМ* за предметно подрачје, мерни единици [m]

Име на модел	Минимум	Максимум	Средина	<i>STD</i>
<i>SRTM-ASTER</i>	-19.8	13.8	2.4	3.9
<i>MERIT-TANDEM</i>	-44.36	20.2	-4.9	6.5
<i>MERIT-SRTM</i>	-154.6	109.3	-1.3	35.7
<i>MERIT-ASTER</i>	-161.1	110.5	1.11	35.8
<i>TANDEM-ASTER</i>	-152.5	114.1	6.0	37.2
<i>TANDEM-SRTM</i>	-153.6	116.1	3.6	37.3

Од споредбените резултати, се гледа доста добра корелација на *SRTM-ASTER* и *MERIT-TANDEM*. Причините за тие врски можат да се најдат во фактот дека *SRTM* и *ASTER* се постари модели кои се карактеризираат со помала точност, а со ист вертикален датум (EGM96). Затоа и меѓусебните разлики им се мали (*STD*=3.9 m). Од друга страна, го имаме *MERIT* кој претставува подобрена верзија на *SRTM*, а *TANDEM* е моделот кој се карактеризира со најдобра резолуција и вертикална точност. Иако се со различен вертикален датум, корелацијата на *MERIT-TANDEM* се дефинира преку *STD*=6.5 m. Другите резултати се релативни блиски едни со други, со максимална разлика од 1.6 m.

Слика 5.31 Интерполирани разлики на моделите *MERIT-TANDEM*

Од Слика 5.30 и Слика 5.31 се дефинираат разликите на моделите, соодветно. Генерално, вредностите на разликите се движат од -5 до 10 m за целото предметно подрачје и во двата случаи.

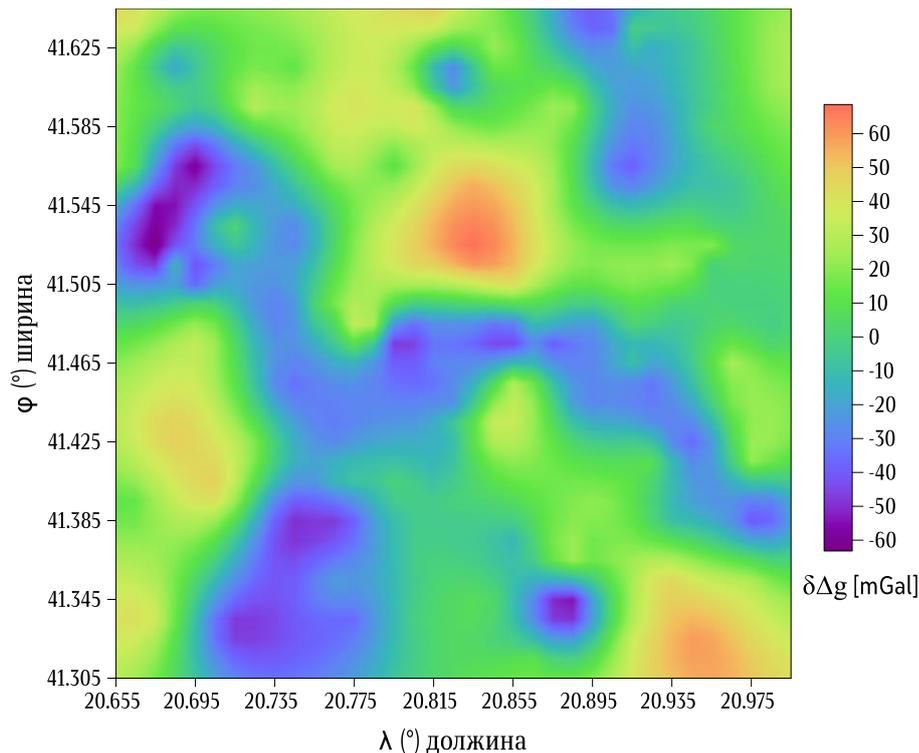
### 5.7.2 Валидација на ДЕМ со гравиметриски точки

Втората валидација на ДЕМ се прави со гравиметриските точки. Тоа значи дека на познатите гравиметриски точки се определуваат ортометриски висини од ДЕМ. Со тоа се добиваат посебни аномалии во слободен воздух со висините од секој ДЕМ и се прави споредба со терестричките аномалии во слободен воздух. Исто така, направена е меѓусебна споредба на аномалиите од различни ДЕМ. Разликите се дефинираат со изразот (5.14). Статистиките за споредбите со терестричките аномалии се дадени во Табела 5.12:

Табела 5.12 Споредба на ДЕМ аномалии со терестрички аномалии, мерни единици [mGal]

Име на модел	Минимум	Максимум	Средина	STD
<i>MERIT</i>	-55.8	50.7	17.6	22.4
<i>TANDEM</i>	-55.1	53.2	33.5	22.7
<i>SRTM</i>	-58.1	60.1	-27.3	24.6
<i>ASTER</i>	-61.6	57.9	19.1	24.7

При споредбата, мали се разликите во однос на *STD*, максимални од 2.3 mGal. Сепак, треба да се напомене дека повторно *MERIT* моделот генерира најмала грешка од 22.4 mGal. Со тоа се потврдува дека овој модел дава најдобри резултати при споредба и со нивелманските и со гравиметриските мерења.

Слика 5.32 Интерполирани разлики на терестрички аномалии со *MERIT* аномалии

Покрај оваа споредба, се прави уште една анализа за соодносот на *ДЕМ* во однос на аномалиите кај секој од нив. Резултатите се прикажани во Табела 5.13:

Табела 5.13 Статистика за разлики на *ДЕМ* аномалии за предметно подрачје, мерни единици [mGal]

Име на модел	Минимум	Максимум	Средина	<i>STD</i>
<i>SRTM-ASTER</i>	-0.7	2.9	0.8	0.7
<i>MERIT-TANDEM</i>	-4.0	2.4	-1.6	1.1
<i>MERIT-SRTM</i>	-13.5	7.3	-0.9	3.8
<i>MERIT-ASTER</i>	-12.7	8.5	-0.1	3.9
<i>TANDEM-SRTM</i>	-11.9	10.1	0.6	3.9
<i>TANDEM-ASTER</i>	-11.5	10.1	1.4	3.9

Од Табела 5.13 се забележува дека однесувањето помеѓу моделите е слично како и при споредбите на моделите со ортометриските висини. Генерално, сите модели се генерираат со мали меѓусебни разлики. Најмала е разликата помеѓу *SRTM-ASTER* и *MERIT-TANDEM*. Најголема е разликата *TANDEM-ASTER*. Помеѓу најмалите и најголемите стандардни девијации има разлика од 3.2 mGal.

### 5.8 Теренски корекции

Теренските корекции се мали корекции кои се додаваат на непотполните Бугеови аномалии за да се добијат комплетните Бугеови аномалии. Тие го претставуваат влијанието кое го имаат околните топографски маси врз мерењата на предметната точка. Тие практично се користат во методот *CSH*, а беа подетално објаснети во поглавје 3.4.

За нивна пресметка постојат повеќе начини:

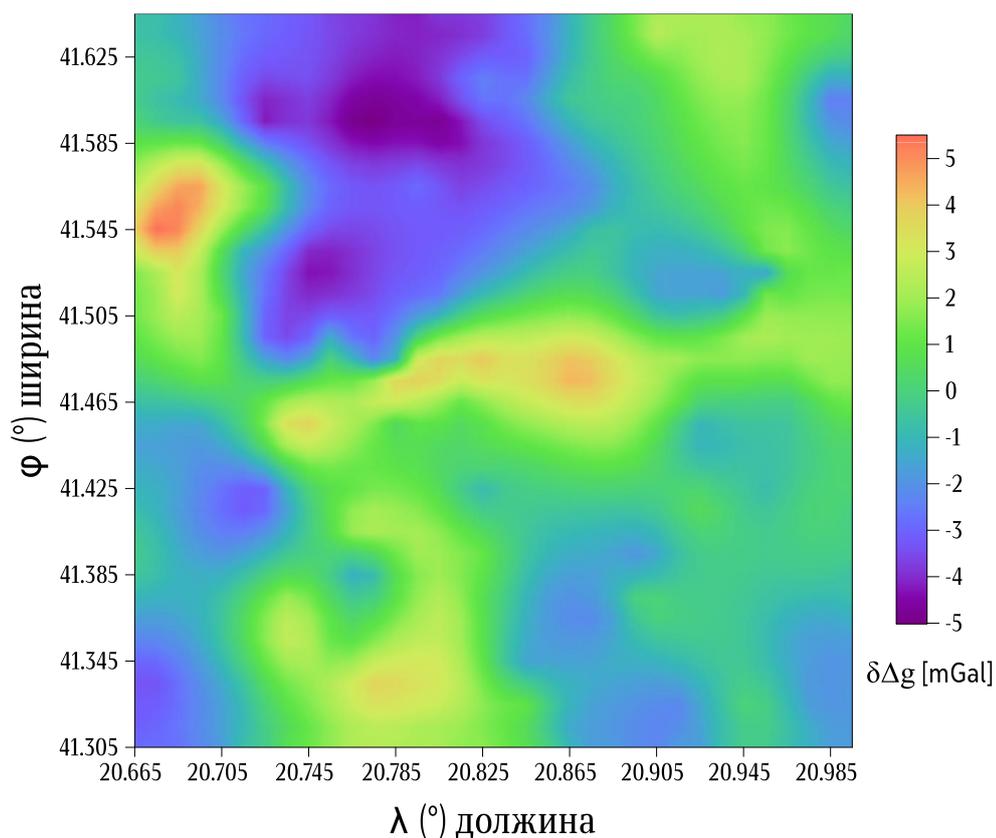
- Користење на корекции од моделот *SRTM2Gravity* (Hirt et al., 2019). Станува збор за модел дефиниран врз база на *MERIT* моделот со кој се произведени мапи на комплетни Бугеови аномалии од -60 до 85 степени географска ширина. Продуктот на оваа мисија е 3" глобална покриеност. Друга опција е добивање на *RTM (residual terrain modelling)* корекции. Обработката на податоците се прави во *Matlab* преку користење на повеќе карти дефинирани со ширина и должина. За да се добијат теренските корекции потребно е од комплетните Бугеови аномалии да се одземат влијанијата од Бугеовата плоча (непотполните Бугеови аномалии). Овој процес зема повеќе време и во својата основа го користи само *MERIT* системот, па практично нема да бидат искористени овие корекции.
- *TC-cylinder* (Olgun et al., 2023) е софтверски пакет кодиран со C++ програмски јазик кој се користи за дефинирање на теренски корекции и комплетни Бугеови аномалии. Се работи за програм тестиран со користење на *SRTM* модел од 1". Програмот е корисен за пресметка на теренски корекции на претходно дефинирани станици (ширина, должина и ортометриска висина). Со овој програм, теренот околу предметната станица се дели на концентрични кружници на определени радиуси дефинирани со теренски модели. Како најпрактични се сметаат 1" за внатрешен радиус ( $\approx 30$  m) и 15" за надворешен радиус ( $\approx 458$  m). Софтверот нуди можност за дефинирање на радиуси од страна на корисникот кој претходно мора да ги припреми теренските модели. Со самото стартување на процесирањето, софтверот ги пресметува аномалиите во слободен воздух, непотполните Бугеови аномалии, теренските корекции и потполните Бугеови аномалии. За пресметките со *CSH* методата потребни се теренски корекции за податочното подрачје кое опфаќа  $2.35^\circ \times 2.35^\circ$ , па оваа метода е непрактична поради времетраењето на процесирањето. Затоа теренските корекции се пресметани само за предметното подрачје на гравиметриските точки.
- Трет начин со кој се извршува пресметувањето на корекциите е преку модулот *TC* од софтверот *GRAVSOFIT*. Овој метод функционира на делење на теренот на правоаголни призми (квадари) чија висина е еднаква на ортометриските висини од предметните точки. За дефинирање на корекциите е потребно да се подготват три теренски модели: детален (36"), груб (72") и референтен (108"). Резолуцијата на моделите е по избор на корисникот. Суштината е да не се преоптовари софтверот со користење на многу детални модели. Влезни податоци се ортометриски висини со дефинирани ширина и должина од GRID мрежата која ќе одговара на конечната резолуција од гравиметрскиот геоид. Тука, резолуцијата е 0.01 лачен степен или 36". Тука, слично како кај претходниот софтвер, потребно е да се дефинираат внатрешен и надворешен радиус. Изборот е произволен, со најчести вредности од 0 до 20 km за внатрешен и од 20 до 200 km за надворешен радиус. Со оглед на најкраткото потребно време за пресметка, изборот е на *TC* модулот за дефинирање на теренските корекции. *TC* софтверот функционира со програмскиот јазик *Python*.

Табела 5.14 Оцена на точност на теренските корекции и нивните разлики, предметно подрачје, мерни единици [mGal]

Софтвер	Минимум	Максимум	Средина	STD
<i>TC</i>	1.5	16.9	6.3	2.9
<i>TC_cylinder</i>	1.8	17.9	6.7	2.8
<i>TC-TC_cylinder</i>	-5.0	5.5	-0.4	2.0

Од Табела 5.14 се забележува дека двата софтвери генерираат речиси идентични резултати, со поголема разлика за максималните вредности од 1 mGal. Стандардната девијација е речиси идентична со вредност од 2.8 и 2.9 mGal.

Разликите варираат од -5 до 5.5 mGal со *STD* еднаква на 2 mGal. Тоа укажува на фактот дека двата софтвери можат да се користат за дефинирање на корекции на одреден број станици со голема точност. Сепак, *TC* е супериорен во однос на *TC\_cylinder* за поголеми површини, кога се потребни GRID мрежи на корекции за дефинирање на гравиметрискиот геоид. Важно е да се каже дека за компарацијата на софтверите, резултатите се креирани со користење на мерените ортометриски висини за гравиметриските точки. На сличен начин ќе биде направена споредба, во *TC* модулот каде се користат висините добиени од различни *ДЕМ* модели (*SRTM*, *ASTER*, *MERIT* и *TANDEM*).



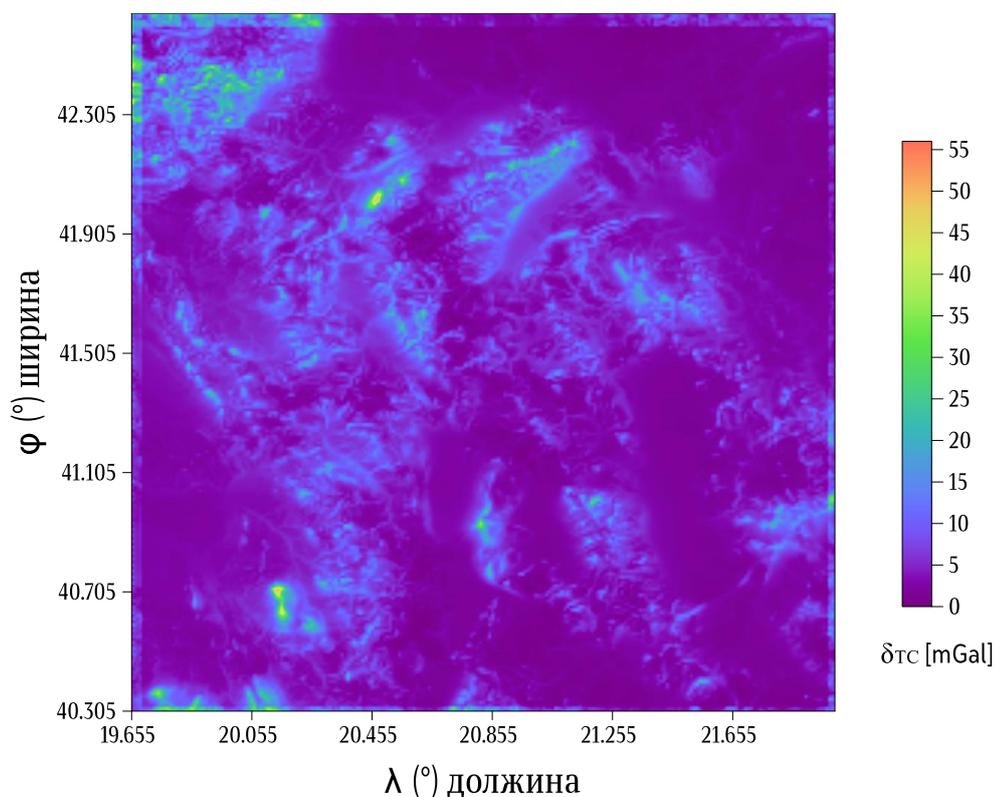
Слика 5.33 Интерполирани разлики на теренски корекции за предметно подрачје, мерни единици [mGal]

Табела 5.15 Оцена на точност на теренските корекции за податочно подрачје, мерни единици [mGal]

Модел	Минимум	Максимум	Средина	<i>STD</i>
<i>SRTM</i>	0.2	55.3	4.9	4.2
<i>ASTER</i>	0.3	53.0	5.2	4.3
<i>TANDEM</i>	0.4	57.0	5.9	4.9
<i>MERIT</i>	0.4	63.0	5.9	5.0

Со Табела 5.15, може да се заклучи дека сите модели генерираат слични теренски корекции. Минимумот за сите модели се разликува најмногу до 0.2 mGal. Максимумот има нешто поголеми разлики кои достигнуваат и до 10 mGal за екстремните точки, а се поврзани со планинските предели во северозападниот дел од податочното подрачје. Средините се слични со разлики од 1 mGal. Најважниот показател е *STD* каде вредностите се движат од 4.2 mGal до 5.0 mGal. Тоа значи дека најмала грешка има *SRTM*, а најголема моделот *MERIT*.

Од Слика 5.34 може да се заклучи дека во рамки на целото податочно подрачје вредностите за теренските корекции ги задоволуваат теориите за мали вредности. Генерално, тие се движат од 1 до 15 mGal. Тоа го докажуваат и малите вредности за средините кои се движат околу 5 mGal во Табела 5.15. Екстремните вредности се забележува дека се однесуваат на планинските масиви.

Слика 5.34 Теренски корекции за податочно подрачје, модел *SRTM*, мерни единици [mGal]

Табела 5.16 Оцена на точност на разлики од теренските корекции за податочно подрачје, мерни единици [mGal]

Модел	Минимум	Максимум	Средина	STD
<i>MERIT-TANDEM</i>	-10.2	32.1	0.0	0.4
<i>SRTM-ASTER</i>	-22.2	43.8	-0.3	1.1
<i>ASTER-MERIT</i>	-17.0	7.2	-0.7	1.2
<i>ASTER-TANDEM</i>	-18.3	15.1	-0.7	1.2
<i>SRTM-MERIT</i>	-32.0	43.7	-0.9	1.7
<i>SRTM-TANDEM</i>	-31.8	43.2	-0.9	1.7

Направена е и меѓусебна компарација на корекциите од различни модели. Со најмала разлика се карактеризираат *MERIT-TANDEM* дефинирана со *STD* од 0.4 mGal. Најголема е грешката на парот *SRTM-TANDEM* и *SRTM-MERIT* која изнесува 1.7 mGal. Останатите разлики се со грешки кои се движат од 1.1 до 1.2 mGal.

Во поглед на минималните и максималните вредности за разликите, се забележуваат големи интервали кои достигнуваат вредности и од 75 mGal. Сепак, од друга страна средините се со максимални вредности од 0.9 mGal. Тоа укажува на фактот дека постојат одредени точки каде се јавуваат овие големи вредности за минимум и максимум, додека пак сите останати се движат околу нула, што придонесува до мали вредности на стандардната девијација.

## 6. КТН МЕТОДА – МОДЕЛИ НА ГЕОИД

Ова е поглавјето каде ќе бидат презентирани практичните модели на геоид добиени со КТН методата. Доаѓањето до конечен модел е долг процес кој содржи голем број променливи. Корисникот е тој што мора да направи избор, а како фактор што е водилка кон конечното решение е средната квадратна грешка. Суштински, еден геодет мора да ги провери сите можни влијанија и да ја пресмета на крај грешката што го карактеризира моделот.

Табела 6.1 Променливи и влезни податоци при пресметување на геоид, КТН метод

Променливи- Влезни податоци	Симбол	Вредности
Максимален степен на експанзија на ГГМ	$n_{max}$	10,30,50,70,...260,280,300
Интеграциски радиус	$\psi_0$	0.2, ..., 1.5 [°]
Варијанса на терестрички аномалии	$C$	1, 2, 5, 10... 20 [mGal <sup>2</sup> ]
Тип на стохастичка модификација на Стоксовиот интеграл	$\nu$	1=пристрасно, 2=непристрасно, 3=оптимум
Глобален геопотенцијален модел	ГГМ	Tongji_GRACE02k, HUST_GRACE2016s, GOSG02S, GO_CONS_GCF_2_TIM_R6, GOSG01S, WHU-SWPU-GOGR2022S, ITU_GGC16
Дигитален теренски модел	ДЕМ	SRTM, ASTER, MERIT, TANDEM
Аномалии во слободен воздух	$\Delta g_{FA}$	Грид мрежа - резолуција (36'' x 36''), различни теренски модели

Сите подготвителни работи за пресметка на гравиметрискиот геоид беа објаснети детално преку повеќе анализи во претходните поглавја. Се доаѓа до моментот на одлука за дефинитивен модел. Тоа мора да се направи преку пробување на различни комбинации на влезните параметри, добивање на модел и негова споредба со 46те ГНСС-нивелмански точки. Дефинитивниот гравиметриски модел ќе биде вклопен во геометрискиот и ќе се добие конечниот хибриден модел со КТН методата.

### 6.1 Влијание на влезните податоци и променливите врз КТН моделите

Со влезните податоци и променливите дефинирани во Табела 6.1 се пресметани 2520 модели на гравиметриски геоид. Сите променливи и влезни податоци имаат различни степени на влијание на конечните модели. Статистичките показатели за тоа какво е влијанието се повторно средните квадратни грешки. Редоследно, потребно е да се направат следните пресметки:

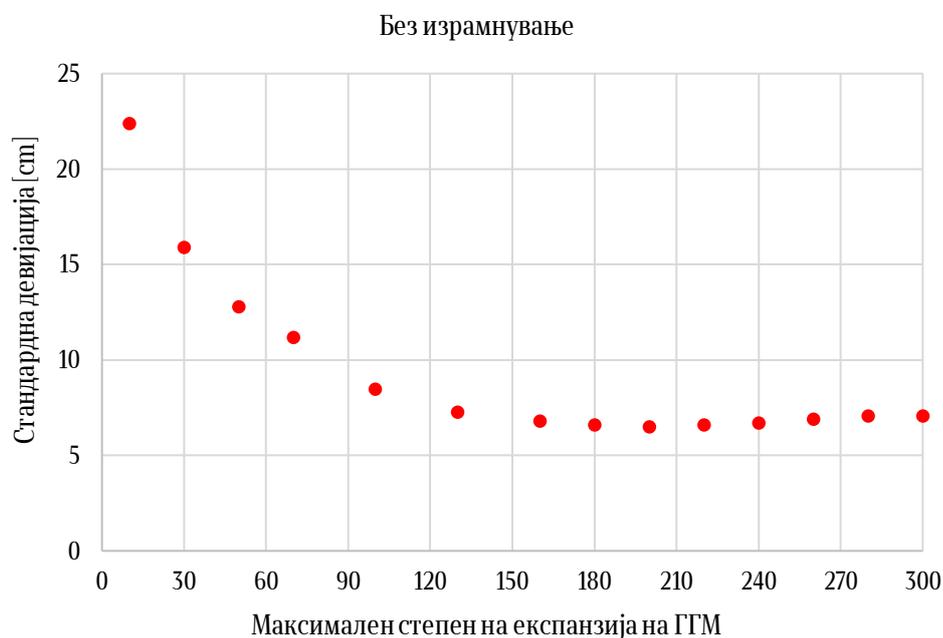
- Менување на една променлива, додека останатите имаат фиксни вредности;
- Добивање на гравиметриски геоид;
- Споредба на разликите помеѓу гравиметриски и геометриски геоид;
- Определување на *STD* за разликите (*no-fit*) и (*4 параметарски*);

- Променливата која има најмала  $STD$  се зема како фиксен параметар во следните пресметки.

Прикажувањата на влијанијата од променливите ќе биде направено преку графикони на соодносите од променливите со стандардната девијација. Притоа, за секоја променлива ќе бидат прикажани по два графикони, кога нема израмнување и кога имаме параметарско израмнување. Прво ќе се анализираат променливите и нивните резултати, а потоа и влезните податоци.

- **Максимален степен на експанзија на ГГМ-  $n_{max}$**

Првата оценка на точност се прави преку промена на  $n_{max}$  за ГГМ, со фиксни вредности за другите параметри:  $\psi_0 = 0.5^\circ$ ,  $C = 1 \text{ mGal}^2$ ,  $\nu = 1$ , ГГМ-GOSG02S, ДЕМ-SRTM,  $\Delta g_{FA}$ -SRTM.

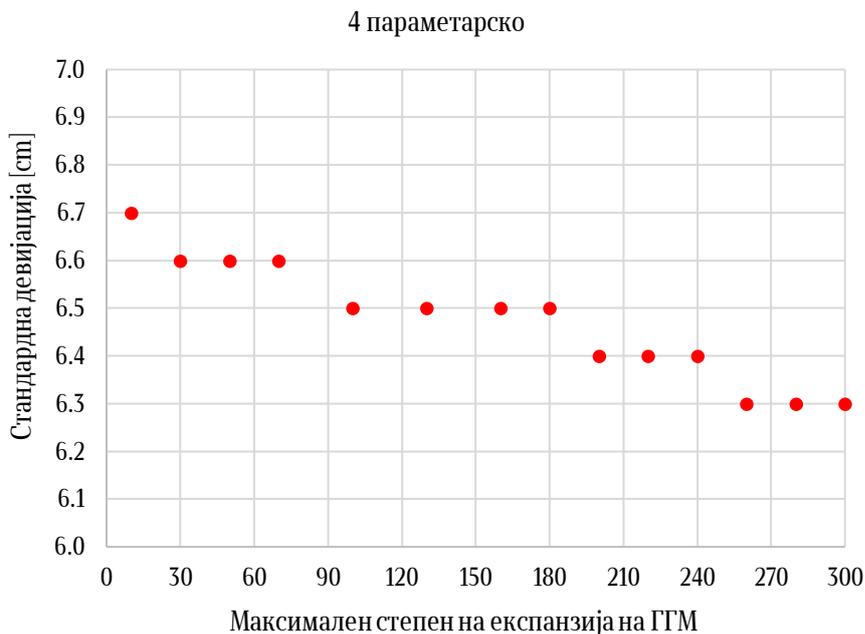


Слика 6.1 Влијание на максимален степен на експанзија врз геоидот, без израмнување

Од сликата, се забележува дека градијентот на максималните степени на експанзија започнува од степен 10 со грешка од 22.4 cm. Меѓу степените 10 и 200, има константно опаѓање на стандардната девијација. Вредноста што ја достигнува грешката при максимален степен 200 изнесува 6.5 cm. После тоа, се до степен 300 како максимален степен при анализите, таа има благ пораст, достигнувајќи вредност од 7.1 cm. Се забележува дека пониските и повисоките степени генерираат поголеми грешки. Пониските степени не прикажуваат доволно детали, додека повисоките се оптоварени со поголеми грешки на сферните коефициенти.

На Слика 6.2 е дефиниран соодносот на  $n_{max}$  со  $STD$  кога се користи израмнување. Резултатите укажуваат дека е неопходна имплементација на израмнувачка површина за добивање на хибриден геоид. Со отстранување на средните вредности од разликите, се гледа дека  $STD$  се намалува значително за сите степени, особено за пониските и повисоките. Од анализите имаме скалесто намалување на грешката во рамки на 0.1 cm. Почнувајќи од 6.7 cm за  $n_{max} = 10$ , таа има вредност 6.6 cm за  $30 < n_{max} < 90$ .

Најстабилна е со вредност од 6.4 cm при  $90 < n_{max} < 180$ . Најмала вредност од 6.3 cm има при  $260 < n_{max} < 300$ .

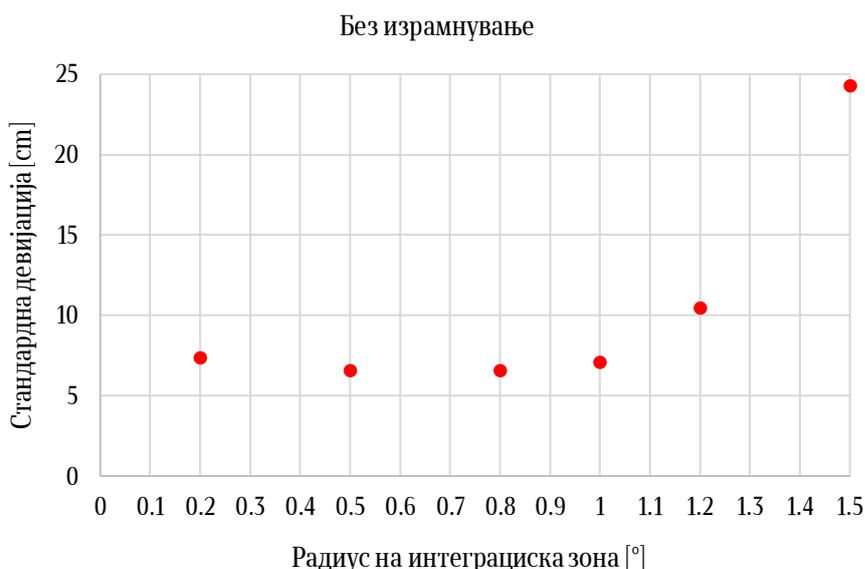


Слика 6.2 Влијание на максимален степен на експанзија врз геоидот, со израмнување

Заклучокот е дека треба да се користат повисоки степени на максимална експанзија за ГГМ во пресметувањата на гравиметрискиот геоид.

- Радиус на интеграциска зона -  $\psi_0$

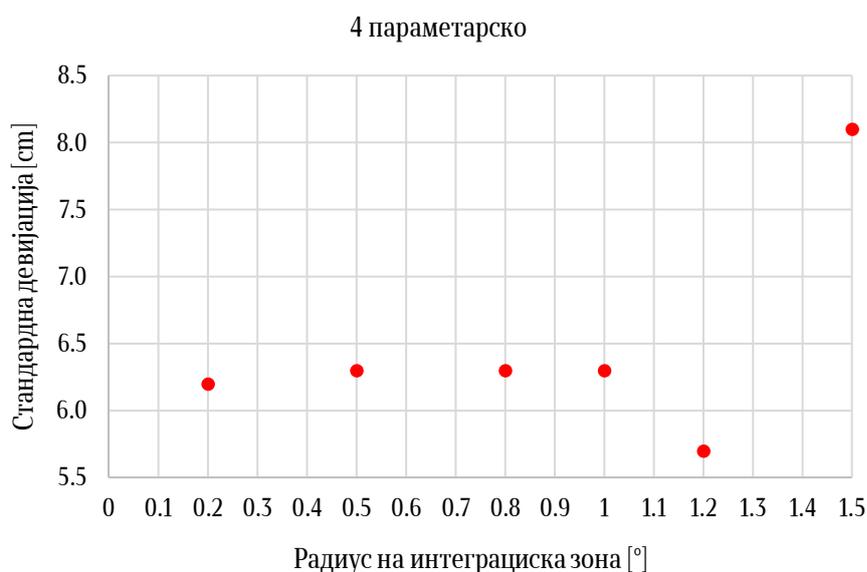
Втора статистичка анализа се прави преку промена на  $\psi_0$ , со фиксни вредности за другите параметри:  $n_{max} = 300, C = 1 \text{ mGal}^2, \nu = 1, \text{ ГГМ-GOSG02S, ДЕМ-SRTM, } \Delta g_{FA-SRTM}$ . Како што беше опишано детално во поглавје 4.4.1.3, еден од поважните параметри кои треба да се изберат е радиусот на интеграција.



Слика 6.3 Влијание на радиусот на интеграција врз геоидот, без израмнување

Се работи за произволно избрана вредност која треба да се тестира со нејзино постепено менување, како што е направено во овој случај. Треба да се внимава на неговата вредност, која е поврзана во однос на големината на податочното подрачје.

Од Слика 6.3 се забележува дека грешката има вредност од 7.5 cm при радиус од 0.2°. Понатака, таа има слични вредности кои се движат од 6.6 до 7.1 cm за радиус од 0.5 до 1°. Со поголеми вредности за радиусот, има поголем раст и на грешката, која при радиус од 1.5° достигнува вредност од речиси 25 cm.



Слика 6.4 Влијание на радиусот на интеграција врз геоидот, со израмнување

Со примена на израмнување на разликите, се намалуваат и вредностите за стандардната девијација. Се забележува дека за вредности на радиусот од 0.2 до 1°, грешката има вредности од 6.2 до 6.3 cm. Најмала грешка ( $STD=5.7\text{ cm}$ ) се добива при радиус 1.2°. Со понатамошно зголемување на радиусот, веќе за вредност од 1.5° се генерира грешка од 8.1 cm. Начинот на однесување на грешката во однос на сферниот радиус има логичко објаснување.

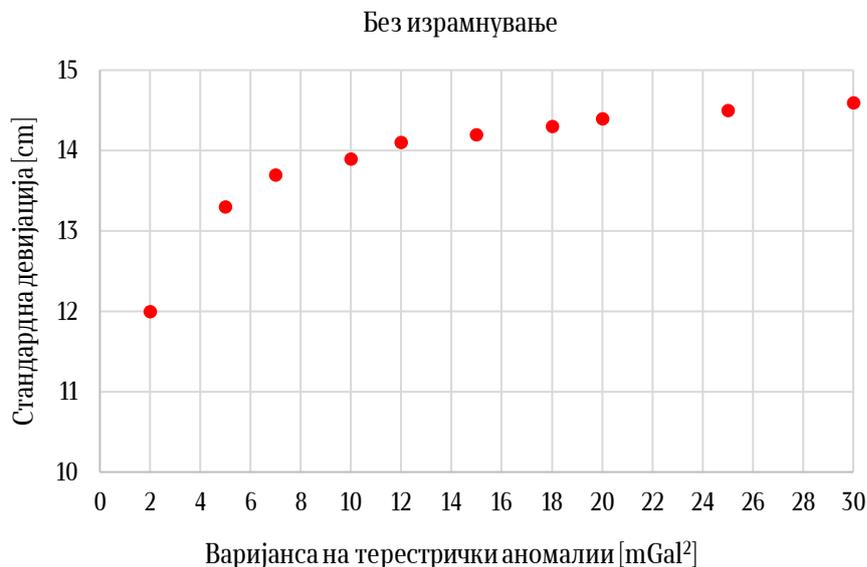
Предметното подрачје е дефинирано со површина од 0.34° x 0.34°. Од друга страна, податочното подрачје е дефинирано со 2.34° x 2.34°. Ако замислиме дека пресметките се прават од центарот на податочното подрачје, тогаш со радиус од 1.2° би се опфатил секој крај на подрачјето. Поголемите радиуси значат излегување вон границите на податочното подрачје, па практично софтверскиот пакет прескокнува одредени пресметувања и затоа се зголемува грешката. Идеално решение би било 1.17°, согласно анализите, меѓутоа веќе на две децимали софтверот не прави разлики, па повторно се добиваат вредности за грешката од 5.7 cm.

#### • Варијанса на терестрички аномалии - C

Третиот параметар кој се менува е варијанса за терестричките аномалии во слободен воздух. Тоа се прави преку промена на C, со фиксни вредности за другите параметри:  $n_{max} = 300$ ,  $\psi_0 = 1.2^\circ$ ,  $\nu = 1$ ,  $GGM-GOSG02S$ ,  $DEM-SRTM$ ,  $\Delta g_{FA-SRTM}$ . Овој параметар претставува квадрат од средната квадратна грешка за аномалиите. Пожелно е вредностите на овој параметар да бидат што е можно помали, односно аномалиите да се

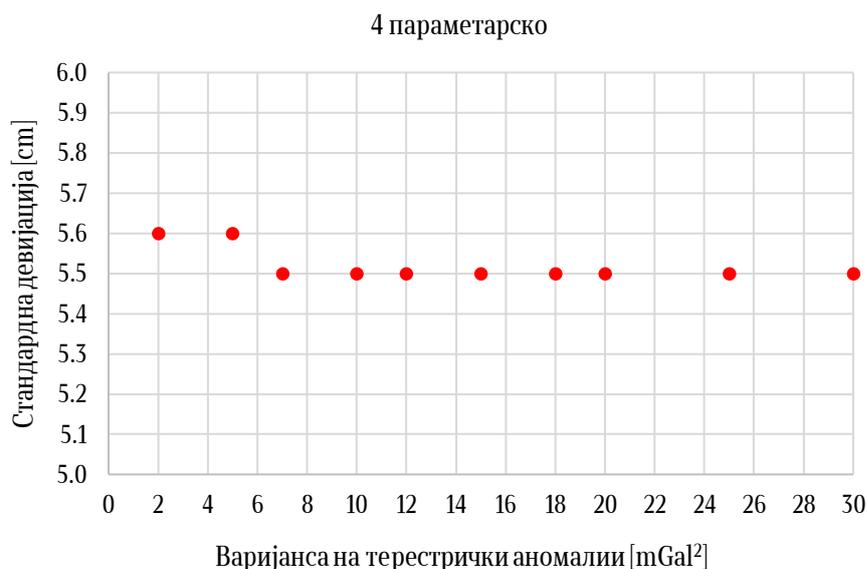
карактеризираат со поголема точност. Овој параметар претежно зависи од теренот каде се пресметува геоидот.

За рамни терени вредностите се движат од 9 до 25  $\text{mGal}^2$ , за ридчести терени, од 25 до 100  $\text{mGal}^2$  и за планински терени, можат да имаат вредности и повеќе од 100  $\text{mGal}^2$ . Како и претходните параметри, така и за овој мора да се прават обиди за определување на геоидот и негова валидација.



Слика 6.5 Влијание на варијанса на терестрички аномалии врз геоидот, без израмнување

На првиот графикон прикажан на Слика 6.5 се забележува дека со растење на варијансата, растат и вредностите за стандардната девијација. Почнувајќи од  $C=2 \text{ mGal}^2$ , вредноста на  $STD=12 \text{ cm}$ . Со зголемување на варијансата до  $C=10 \text{ mGal}^2$ ,  $STD=13.9 \text{ cm}$ . Понатамошното зголемување на варијансата доведува до вредности од  $14.6 \text{ cm}$  на  $STD$ . Штом се забележува константен пораст на грешката, тогаш мора да се одреди која ќе биде варијансата што ќе се користи.



Слика 6.6 Влијание на варијанса на терестрички аномалии врз геоидот, со израмнување

Затоа ни помага и вториот графикон од Слика 6.6, каде се забележува друга ситуација. Почнувајќи од  $C=2 \text{ mGal}^2$ , грешката има вредност 5.6 cm. Сите вредности на варијансите до  $6 \text{ mGal}^2$ , се карактеризираат со иста грешка. Со дефинирање на варијанси од 7 до  $30 \text{ mGal}^2$ , грешката има константна вредност од 5.5 cm. Со оглед на фактот дека за  $C=7 \text{ mGal}^2$ , се добиваат најниски вредности и во двата графикони, таа се усвојува за понатамошна употреба.

- **Стохастичка модификација на Стоксовиот интеграл -  $\nu$**

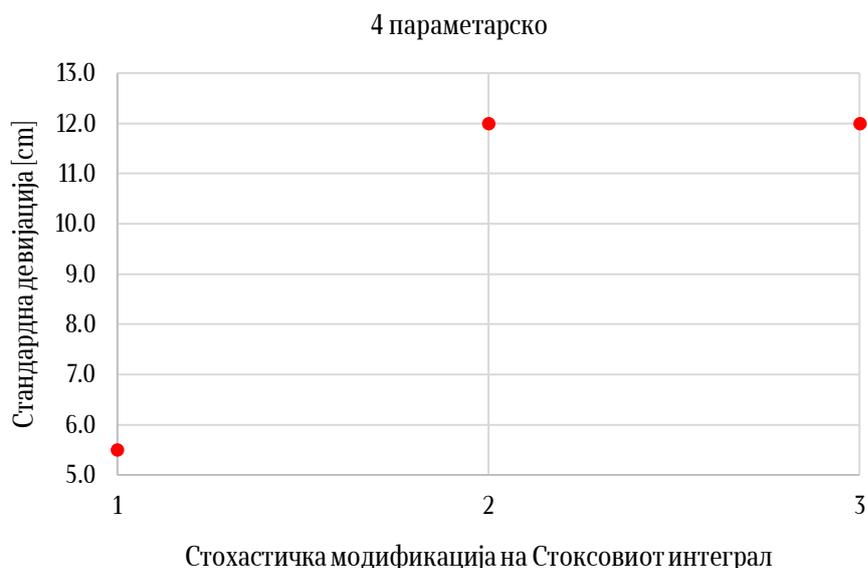
Последниот параметар кој се менува во пресметките е начинот на кој се модифицира Стоксовиот интеграл. Поточно, начинот на кој се модифицираат параметрите со кои се пресметува интегралот. Тоа се прави преку промена на  $\nu$ , со фиксни вредности за другите параметри:  $n_{max} = 300$ ,  $\psi_0 = 1.2^\circ$ ,  $C = 7 \text{ mGal}^2$ , ГМ-GOSG02S, ДЕМ-SRTM,  $\Delta g_{FA}$ -SRTM. Модифицирањето го претставува начинот за добивање на коефициентите  $b_n$  и  $s_n$  преку односите дефинирани во поглавје 4.4.1.2. Во софтверскиот пакет  $\nu = 1$  (пристрасно),  $\nu = 2$  (непристрасно) и  $\nu = 3$  (оптимално). Така ќе бидат означени на графициите кои следат во продолжение.



Слика 6.7 Влијание на стохастичка модификација врз геоидот, без израмнување

На Слика 6.7 се забележува дека е голема разликата во грешката во однос на избраната модификација. Доколку се одлучиме за пристрасно (biased) решение, резултатот од грешката е 13.7 cm. Другите две решенија: непристрасно (unbiased) генерира грешка од 33.2 cm и оптимално (optimum) грешка од 33.1 cm. Доаѓаме до заклучок дека мора да се користи пристрасното решение, бидејќи разликите меѓу него и останатите две е речиси 20 cm. Како уште една валидација ќе биде и примената на 4 параметарско израмнување кое е прикажано на Слика 6.8.

Се забележува дека сличен е трендот и на двата графици, со тоа што при отстранување на средините, се добиваат следните грешки: пристрасно (STD=5.5 cm), додека пак непристрасното и оптималното имаат идентична грешка од 12 cm. Уште еднаш се потврдува дека само решението  $\nu = 1$  може да се користи во понатамошните пресметки.



Слика 6.8 Влијание на стохастичка модификација врз геоидот, со израмнување

Може да се дојде до заклучокот дека различно влијание имаат тестираните променливи, каде најголемо влијание имаат начинот на модификација на параметрите во Стоксовиот интеграл и интеграцискиот радиус. Помали влијанија имаат изборот на максимален степен на експанзија на ГГМ, додека најмалку влијаат грешките со кои се карактеризираат терестричките аномалии.

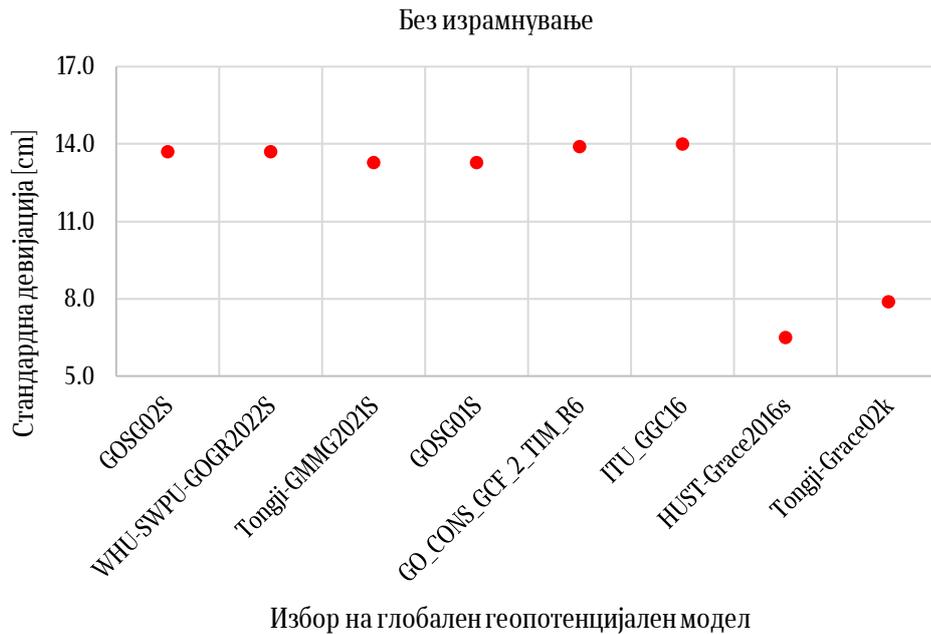
Следни за анализа се влезните податоци и нивното влијание врз дефинитивните модели на геоид.

- **Избор на ГГМ**

Први променливи влезни податоци се глобалните геопотенцијални модели. Тие се разликуваат според максималниот степен на експанзија. Нивните карактеристики беа објаснети во поглавјата 4.3.1, додека пак во поглавјето 5.6 беа извршени спектрални и просторни анализи на ГГМ. При овие анализи, како дефинитивни параметри се користат:  $n_{max}$ =максималниот степен на експанзија за избраниот модел,  $\psi_o = 1.2^\circ$ ,  $C = 7 \text{ mGal}^2$ ,  $\nu = 1$ , ДЕМ-SRTM,  $\Delta g_{FA}$ -SRTM. Тука променливи ќе бидат 8те ГГМ.

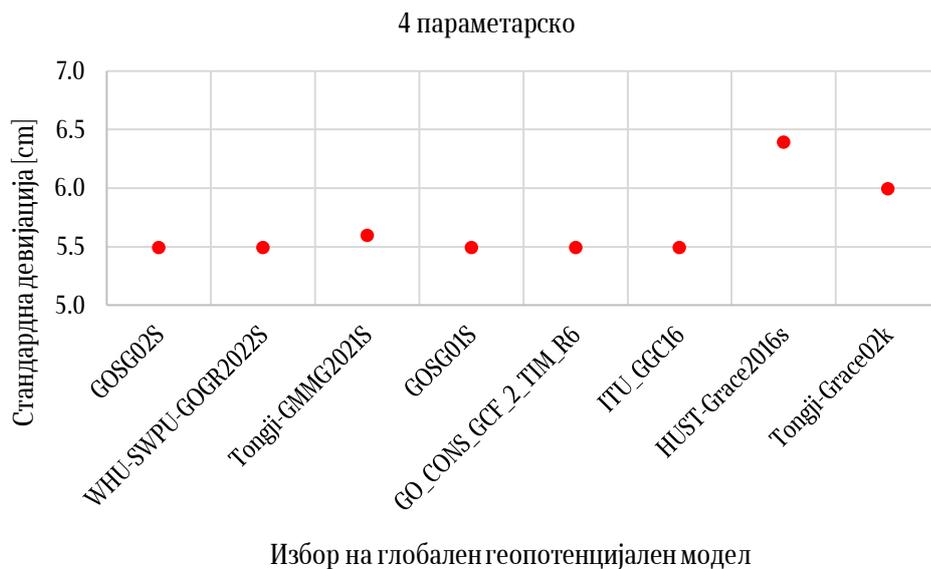
На Слика 6.9 се прикажани средните квадратни грешки за сите ГГМ кои се користени во овој труд. Може да се забележи дека моделите добиени од GRACE мисијата се карактеризираат со најмали вредности за STD: HUST-GRACE2016s (STD=6.5 cm) и Tongji-GRACE02k (STD=7.9 cm). Моделите добиени со GOCE мисијата ги имаат следните вредности: GO\_CONS\_GCF\_2\_TIM\_R6 (STD=13.9 cm), GOSG02S (STD=13.7 cm) и GOSG01S (STD=13.3 cm). Комбинираните модели се карактеризираат со слични вредности за стандардната девијација како и GOCE моделите: ITU\_GGC16 (STD=14 cm), WHU-SWPU-GOGR2022S (STD=13.7 cm) и Tongji-GMMG2021S (STD=13.3 cm). Со споредба меѓу моделите од различни мисии, се доаѓа до заклучокот дека изборот на ГГМ има големо влијание, бидејќи се генерираат разлики во STD вредностите кои достигнуваат 7.5 cm.

Сепак, покрај споредба на разликите без израмнување, повторно следуваат споредбите кога се вметнуваат параметарски израмнувања.



Слика 6.9 Влијание на глобалните геопотенцијални модели врз геоидот, без израмнување

Интересни се резултатите прикажани на Слика 6.9, каде гледаме комплетно спротивна ситуација во однос на претходните заклучоци изнесени за Слика 6.8. Се добиваат најголеми грешки за моделите дефинирани со *GRACE* мисијата, додека пак повторно има блиски резултати во грешките од *GOCE* моделите и *GRACE+GOCE* моделите. Може да се забележи дека *HUST-GRACE2016s* (STD=6.4 cm) и *Tongji-GRACE02k* (STD=6.0 cm). Доаѓаме до ситуација во која моделот кога не применуваме израмнување има најмала грешка, а со имплементација на параметарско израмнување истиот генерира најголема грешка. *GOCE* моделите и комбинираниите модели имаат иста STD вредност од 5.5 cm. Отстапува само моделот *Tongji-GMMG2021S* со STD=5.6 cm, што не е толку значително.



Слика 6.10 Влијание на глобалните геопотенцијални модели врз геоидот, со израмнување

Заклучокот е дека треба да се користат *GOCE* моделите во однос на *GRACE* и комбинираниите модели.

- Избор на дигитални теренски модели

Следни влезни податоци се *ДЕМ*. Презентирани беа карактеристиките на 4 *ДЕМ* модели во поглавје 4.3.2, додека пак нивна валидација со терестричките податоци беа направени во поглавје 5.7. Во овие анализи како дефинитивни параметри се земени:  $n_{max} = 300$ ,  $\psi_o = 1.2^\circ$ ,  $C = 7 \text{ mGal}^2$ ,  $\nu = 1$ , *ITM-GOSG02S*,  $\Delta g_{FA}$ -*SRTM*.



Слика 6.11 Влијание на дигиталните теренски модели врз геоидот, без израмнување

Од Слика 6.11 се забележуваат блиски вредности за грешките кои ги карактеризираат *ДЕМ*. Се работи за грешки кои варираат од 13.5 до 13.7 cm, кога не се користи израмнување при споредбите. Моделите *MERIT* и *TANDEM* предизвикуваат за 0.2 cm подобро согласување на геоидот со *ГНСС*-нивелманските точки.



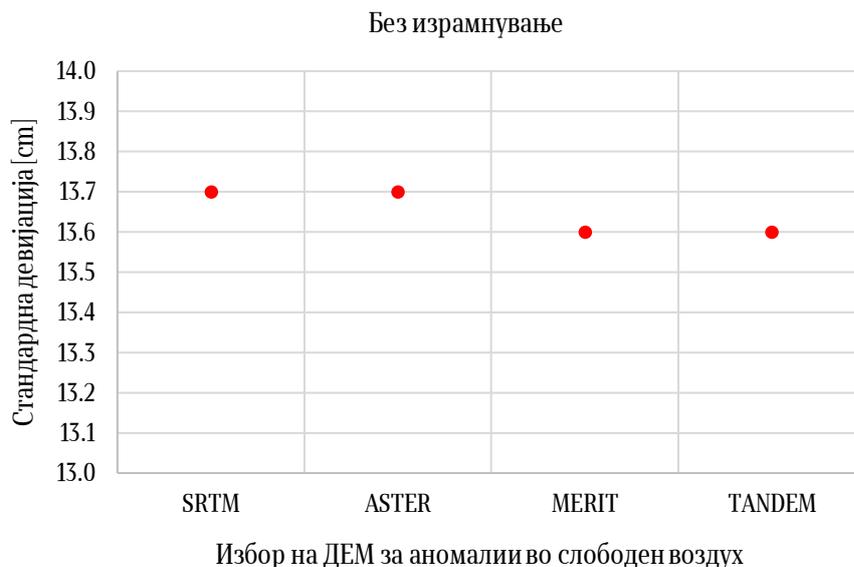
Слика 6.12 Влијание на дигиталните теренски модели врз геоидот, со израмнување

За целосно разбирање на влијанието на *ДЕМ*, потребно е да се направи и вклопување на гравиметрискиот геоид во локалниот вертикален датум. На Слика 6.12 гледаме малку поразлична ситуација отколку на претходната. Во овој случај, моделите *SRTM* и *ASTER*, предизвикуваат помали грешки при споредбите на геоидните ундулации. Тие се карактеризираат со  $STD=5.5$  cm. Сепак, тоа не значи дека *MERIT* и *TANDEM* се неприменливи модели, бидејќи нивните грешки се само за 0.1 cm поголеми од останатите два модела и изнесуваат 5.6 cm.

Како заклучок се изнесува фактот дека сите четири модели генерираат доста слични грешки, па корисникот може да користи било кој од нив. Во понатамошните обработки за *KTH* методот, ќе се користи *SRTM* моделот.

- **Избор на *ДЕМ* за аномалии во слободен воздух**

Последниот сет на податоци кој ќе се менува пред дефинирање на конечниот модел кој генерира најмала можна грешка при споредбите се *ДЕМ* моделите со кои се дефинираат ортометриските висини за аномалиите во слободен воздух. Подеталните анализи за какво е влијанието на *ДЕМ* врз аномалиите е објаснето во поглавје 5.7.2. Практично изборот на *ДЕМ* се однесува во чекорот кога од интерполираните непотполни Бугеови аномалии се добиваат мрежите на аномалии во слободен воздух. При ова тестирање, како дефинитивни параметри се:  $n_{max} = 300$ ,  $\psi_0 = 1.2^\circ$ ,  $C = 7 \text{ mGal}^2$ ,  $\nu = 1$ , *GGM-GOSG02S*, *ДЕМ-SRTM*.

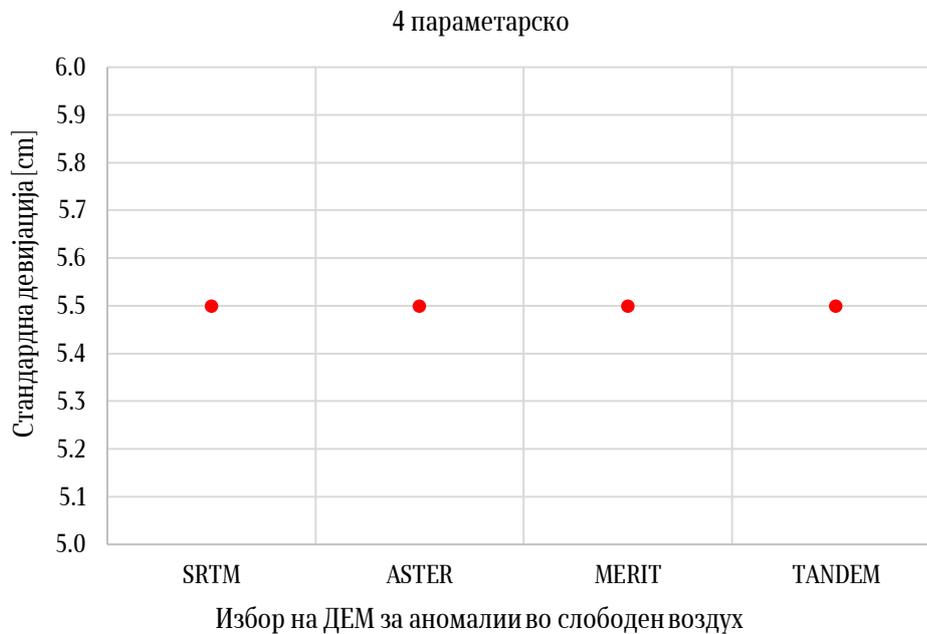


Слика 6.13 Влијание на *ДЕМ* за аномалии во слободен воздух врз геоидот, без израмнување

Од Слика 6.13 се забележува дека грешките се однесуваат слично како и при изборот на *ДЕМ* модел (Слика 6.11). За моделите *SRTM* и *ASTER*, грешките се идентични ( $STD=13.7$  cm). Мало влошување во однос на Слика 6.11 има при користење на моделите *MERIT* и *TANDEM*, каде  $STD=13.6$  cm.

На Слика 6.14 се забележува дека резултатите се идентични за сите четири модели, со  $STD=5.5$  cm. Тоа значи дека изборот на *ДЕМ* за дефинирање на интерполирани аномалии во слободен воздух во овој случај е ирелевантен. Секој *ДЕМ* модел генерира добри аномалии.

Напомена: Треба да се прави разлика помеѓу *ДЕМ* како теренски модел и *ДЕМ* кој се користи за добивање на дефинитивните аномалии во слободен воздух. *ДЕМ* за геоид значи користење на ортометриски висини за податочното подрачје кое е одбрано, додека *ДЕМ* за пресметка на аномалии во слободен воздух се користи за претворање на интерполираните непотполни Бугеови аномалии во аномалии во слободен воздух за податочното подрачје.



Слика 6.14 Влијание на *ДЕМ* за аномалии во слободен воздух врз геоидот, со израмнување

Следи заклучокот дека сите *ДЕМ* модели можат да се користат, а во понатамошните анализи ќе се користи *SRTM*.

Од сите претходни анализи, се доаѓа до дефинитивните параметри и влезни податоци кои генерираат најмала средна квадратна грешка: *ГГМ* - *GOSGO2S*, *ДЕМ* - *SRTM*,  $\Delta g_{FA}$  - *SRTM*,  $n_{max} = 300$ ,  $\psi_o = 1.2^\circ$ ,  $C = 7 \text{ mGal}^2$ ,  $v = 1$ .

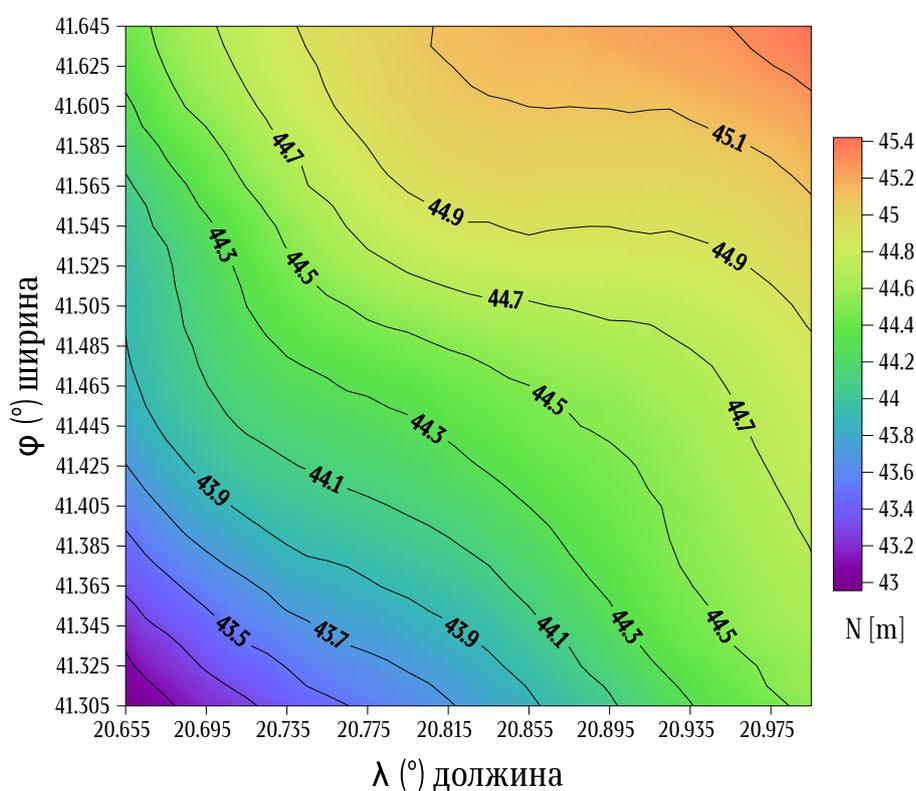
## 6.2 Дефинитивни модели со *КТН* метода

Сите пресметки кои се направени со *КТН* методот се со помош на софтверскиот пакет *LSMSSOFT* (Abbak & Ustun, 2014). Се работи за софтверски пакет напишан во програмскиот јазик *C++* кој може да се работи во оперативниот систем *Linux*. Од поглавје 6.1 беа направени повеќе анализи кои доведуваат до дефинитивните параметри и влезни податоци. Во ова поглавје ќе бидат подетално објаснети сите излезни податоци од процесирањето на геоидните модели. Анализата е направена повторно преку споредба на најдоброто решение со геометриските геоидни ундулации. Покрај гравиметрискиот геоид, ќе биде прикажан и хибридниот геоид. Исто така, ќе бидат претставени сите составни делови на гравиметриските геоидни ундулации. Имињата на геоидите се: гравиметриски (*МККГ-2025*) и хибриден (*МККН-2025*) кои ќе се користат во понатамошниот текст.

Табела 6.2 Оцена на точност на гравиметриски геоид, мерни единици [cm]

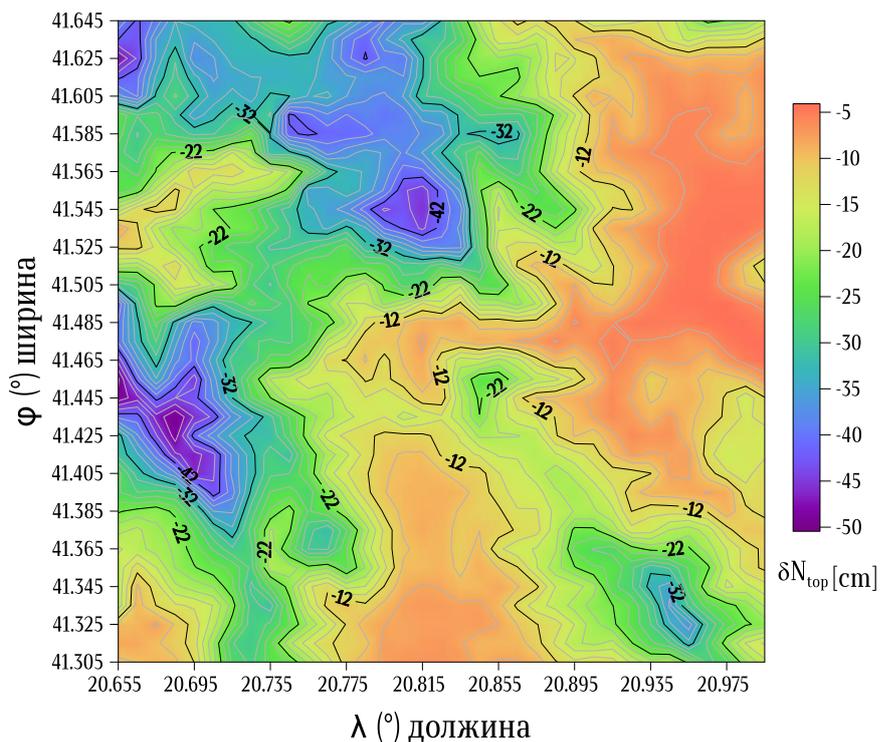
Модел	Израмнување	Мин.	Макс.	Средина	STD
	без израмнување	32.13	85.6	66.9	13.7
МККГ-2025	4 параметарско	-21.4	12.5	0.0	5.53
	5 параметарско	-21.5	12.7	0.0	5.6

Дефинитивното решение со *КТН* методот се дефинира со грешка од 13.7 cm кога не се израмнуваат разликите помеѓу гравиметрискиот и геометрискиот геоид. Со користење на 4 параметарско израмнување, грешката се спушта на 5.5 cm. Со вклопувањето се добива дефинитивниот хибриден модел со *КТН* методот. Добивањето на гравиметрискиот геоид е дефинирано преку пресметување на приближните геоидни ундулации  $\tilde{N}$ , кои во најголема мера ги одредуваат и дефинитивните геоидни ундулации.

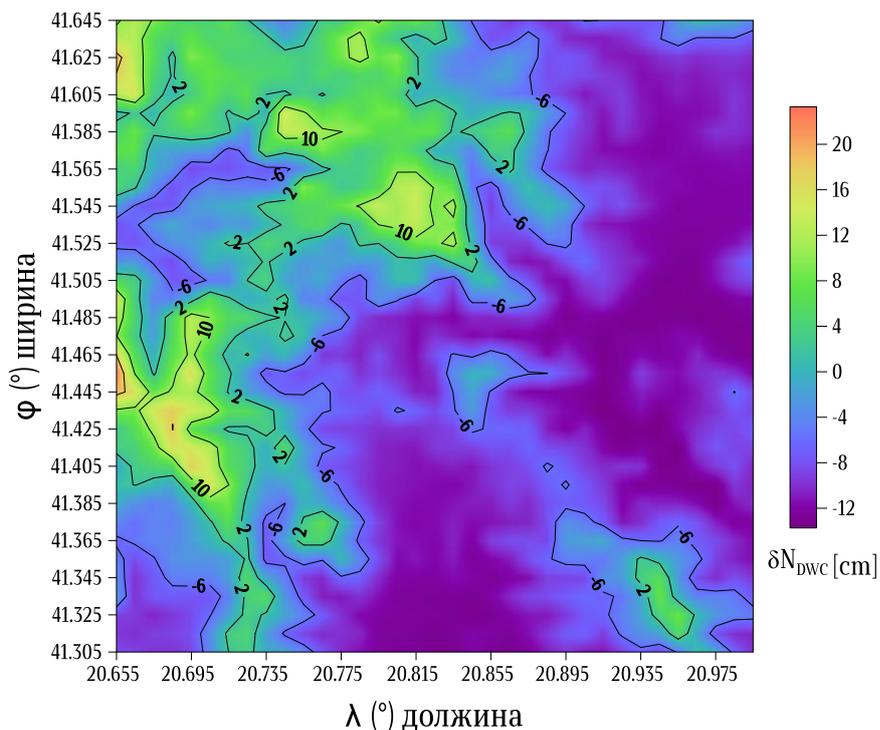
Слика 6.15 Приближни геоидни ундулации  $\tilde{N}$ 

Вредностите за приближните ундулации се движат од 42.9 до 45.4 метри. На Слика 6.15 се забележува трендот на растење во насока кон североисток. Практично, најмалите вредности се во југозападниот дел, а најголемите во северниот дел. Во определување на приближните ундулации, најголемо влијание има изборот на *ГГМ*.

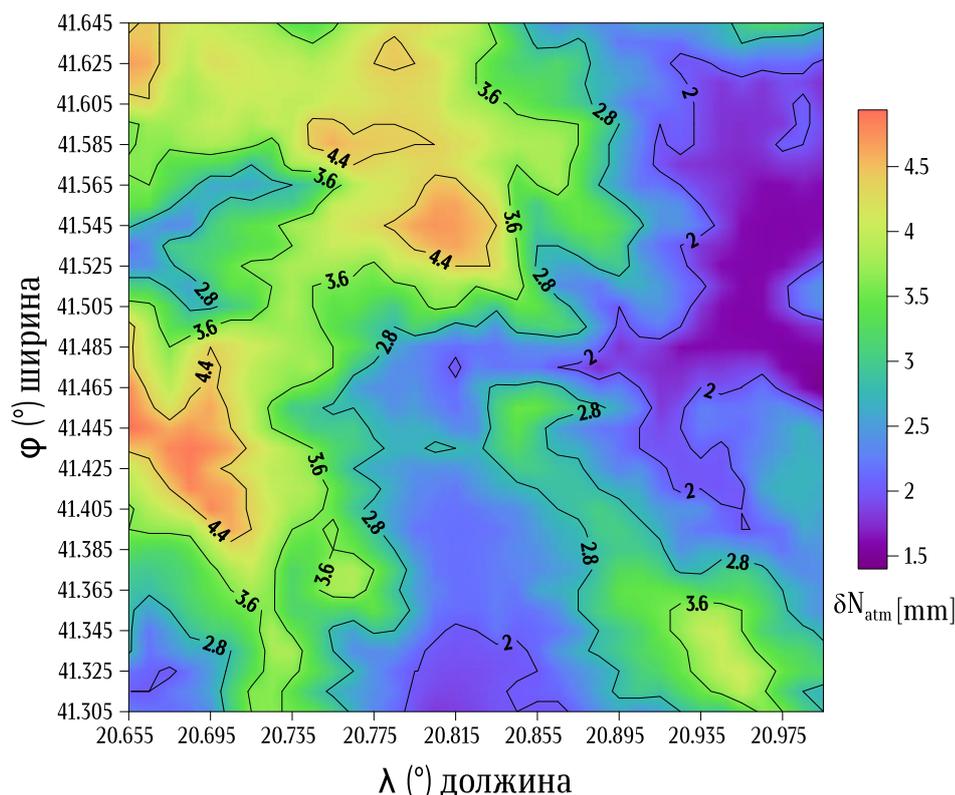
Прва корекција е топографската корекција, чиј графички приказ е претставен на Слика 6.16. Самото име укажува на корелација на корекцијата со топографскиот распоред во предметното подрачје. Се работи за корекција чии вредности се изразени во сантиметри. При пресметките, вредностите се со константен негативен предзнак, со вредности кои се движат од -50.4 cm до -4.1 cm.

Слика 6.16 Топографска корекција  $\delta N_{top}$ 

Со оглед на топографскиот распоред, најголемите вредности се во северозападниот и западниот дел од предметното подрачје. Исто така, високи вредности од -32 cm се достигнуваат и во југоисточниот дел. Остатокот од регионот имаат вредности од -22 до -12 cm. Најниските вредности се добиени за североисточниот дел, во околината на градот Кичево, каде корекциите се движат од -7 до -5 cm. Поврзаноста на корекцијата со топографијата дава голем акцент на правилен избор на среден ДЕМ.

Слика 6.17 DWC корекција  $\delta N_{DWC}$

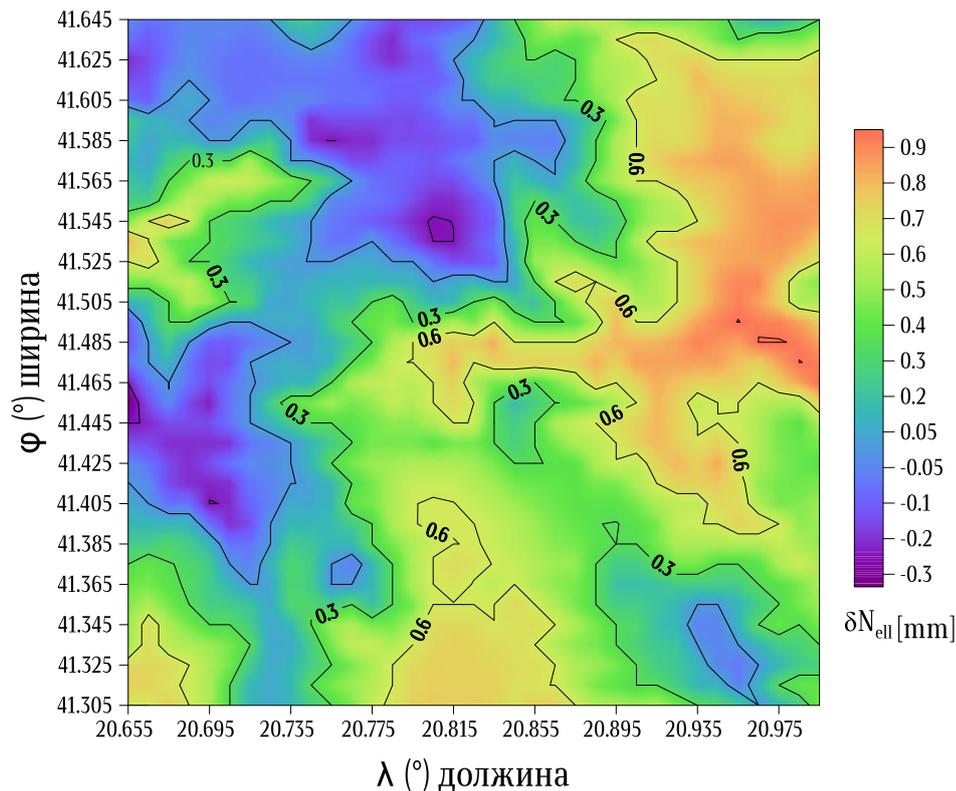
Втора корекција е *DWC* корекцијата, која има помал интензитет во однос на топографската корекција. Тука, корекциите имаат вредности од -13.3 cm до 23.3 cm. Овие корекции се сметаат како дополнување на топографската корекција, а со тоа исто така се зависни од топографскиот распоред на масите. Од Слика 6.17 се забележува дека распоредот на оваа корекција има сличности со топографската корекција. На местата каде има карактеристични издигнувања, вредностите се поголеми. Такви се западниот и северозападниот дел каде корекцијата достигнува до 10 cm, најчесто. Максимумот е достигнат на највисоките точки од теренот со просечна вредност од 18 до 23 cm. Од друга страна, повторно минималните вредности, со негативен предзнак, се пресметани за регионот околу градот Кичево, но тие продолжуваат и кон јужниот дел од предметното подрачје.



Слика 6.18 Атмосферска корекција  $\delta N_{atm}$

Третата корекција е атмосферската корекција, која го прикажува влијанието на атмосферските маси во близина на предметните точки. На Слика 6.18 е прикажан распоредот на корекциите, од каде се забележува поврзаноста на оваа корекција со претходните две. Оваа корекција има вредности од 1.4 mm до 4.9 mm. Се работи за мали вредности, кои сепак не можат да се занемарат. Влијанието е најизразено на повисоките предели, додека пак минималните вредности се однесуваат за околината на градот Кичево, повторно. Нејзиниот предзнак е постојано позитивен.

На Слика 6.19 е прикажана последната големина која влијае на дефинитивните геоидни ундулации, а тоа е елипсоидната корекција. Нејзините вредности се доста помали од останатите корекции, па често пати се смета и за занемарлива големина. Сепак, за пресметување на геоид според *KTN* методата, истата се пресметува и внесува во конечните решенија.



Слика 6.19 Елипсоидна корекција  $\delta N_{ell}$

Таа се карактеризира со вредности кои се движат од -0.4 mm до 0.9 mm. Интересно е што најмалите вредности се однесуваат на повисоките места, а најголемите на најниските предели кои се дефинирани со црвена боја на графичкиот приказ.

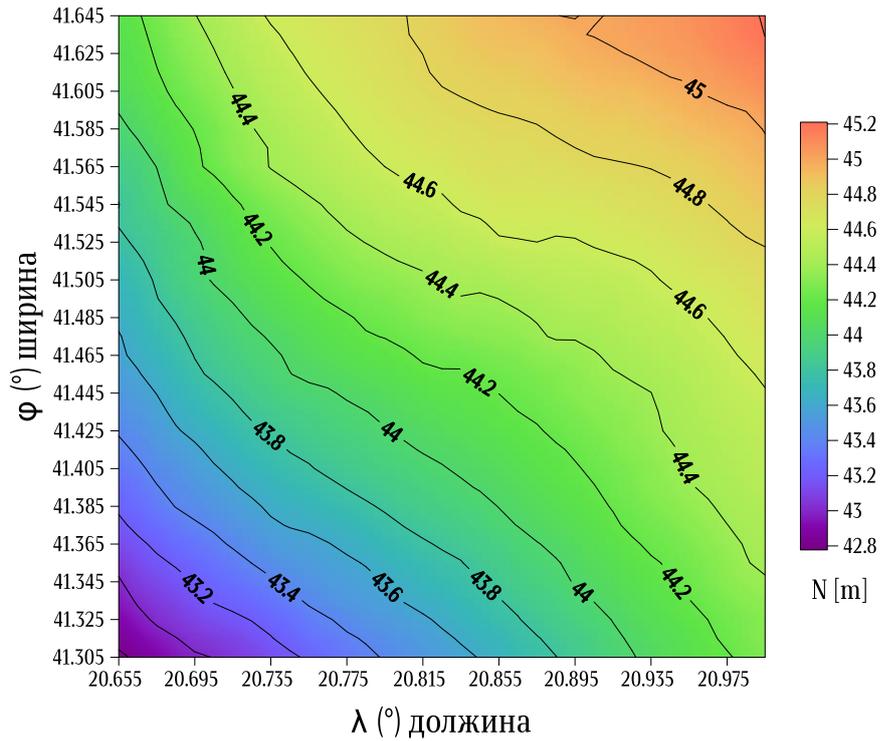
На следната табела се прикажани сите вредности на приближните ундулации, заедно со дополнителните корекции, за предметното подрачје:

Табела 6.3 Статистика за излезни големини при *KTH* метода

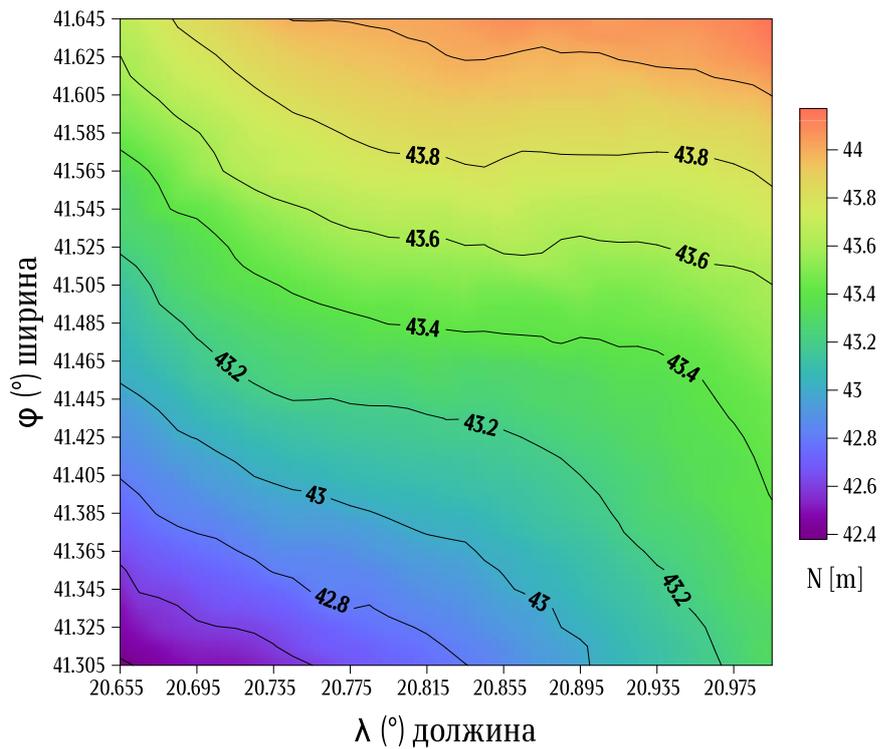
Големина	Мерни единици	Мин.	Макс.	Средина	STD
$\tilde{N}$	[m]	42.9	45.4	44.5	0.5
$\delta N_{top}$	[cm]	-50.4	-4.1	-19.8	10.9
$\delta N_{DWC}$	[cm]	-13.7	23.3	-4.3	7.4
$\delta N_{atm}$	[mm]	1.4	4.9	3.0	0.8
$\delta N_{ell}$	[mm]	-0.4	0.9	0.3	0.3

Со табеларниот преглед на вредностите за приближните ундулации и дополнителните корекции, се забележува дека влијание во рамки на метри имаат единствено приближните ундулации  $\tilde{N}$ . Топографската корекција  $\delta N_{top}$  и корекцијата за аналитичко продолжување на влијанието на аномалиите врз површината од геоидот  $\delta N_{DWC}$  се во рамки на сантиметри. Атмосферската корекција има вредности во ранг на милиметри, додека елипсоидната има вредности од делови од милиметар.

Во прилог следат графичките прикази на гравиметрискиот геоид *MKKG-2025* и хибридниот геоид *MKKN-2025*.



Слика 6.20 Гравиметриски геоид МККГ-2025



Слика 6.21 Хибриден геоид МККН-2025

Табела 6.4 Вредности на гравиметриски и хибриден геоид, КТН метода, мерни единици [m]

Модел	Мин.	Макс.	Интервал	Средина	STD
МККГ-2025	42.78	45.21	2.43	44.22	0.50
МККН-2025	42.38	44.17	1.79	43.37	0.39

Се забележува дека кај гравиметрискиот геоид има интервал од 2.43 m помеѓу најмалите и најголемите вредности на геоидните ундулации. Со вметнување на израмнување, а со тоа и добивање на хибридниот геоид, тие разлики се намалуваат на 1.79 m. Грешката од 0.5 m се намалува на 0.39 m при интерполирање.

## 7. CSH метода – модели на геоид

Втората метода која теоретски беше опишана во поглавје 7, сега добива практична разработка. Станува збор за класичниот Стокс-Хелмертов (CSH) начин за пресметка на гравиметриски геоид. Слично како и кај KTH методата, така и во оваа мора да бидат дефинирани поголем број на променливи големини за да се дојде до дефинитивното решение. Променливите не се единствените параметри, туку составен дел се и влезните податоци кои можат да имаат различни вредности, во однос на тоа кои податоци се применуваат. Тоа значи дека со секоја промена, се дефинираат нови гравиметриски геоидни модели. Во Табела 7.1 се прикажани сите податоци и параметри кои влијаат на решенијата во CSH методата.

Табела 7.1 Променливи и влезни податоци при пресметување на геоид, CSH метод

Променливи- Влезни податоци	Симбол	Вредности
Максимален степен на експанзија на ГГМ	$n_{max}$	10,30,50,70,...260,280,300
Интеграциски радиус	$\psi_o$	0.2, ..., 1.5 [°]
Максимален степен на модификација на Стоксова функција	$L$	10, 30, 50, 70,...,280,300
Глобален геопотенцијален модел	ГГМ	Tongji_GRACE02k, HUST_GRACE2016s, GOSG02S, GO_CONS_GCF_2_TIM_R6, GOSG01S, WHU-SWPU-GOGR2022S, ITU_GGC16
Дигитален теренски модел	ДЕМ	SRTM, ASTER, MERIT, TANDEM
Аномалии во слободен воздух	$\Delta g_{FA}$	Грид мрежа - резолуција (36'' x 36''), различни теренски модели
Теренски корекци	$\delta_{TC}$	Грид мрежа - резолуција (36'' x 36''), различни теренски модели

Сите подготвителни работи за пресметка на гравиметрискиот геоид беа објаснети детално преку повеќе анализи во претходните поглавја. Сличен принцип на тестирање ќе биде искористен и во ова поглавје како и кај претходната метода. Практично, секоја променлива и влезен податок ќе биде сменет, а крајниот гравиметриски геоид ќе биде спореден со геометрискиот геоид во рамки на предметното подрачје. Стандардната девијација е основниот показател за тоа која комбинација на влезни параметри генерира најмала грешка. Пресметките со оваа метода ќе се прават со користење на програмскиот пакет **CSH**SOFT (Abbak et al., 2024). Се работи за софтвер изработен во програмскиот јазик C++ кој може да се управува преку оперативниот систем Linux.

### 7.1 Влијание на влезните податоци и променливите врз CSH моделите

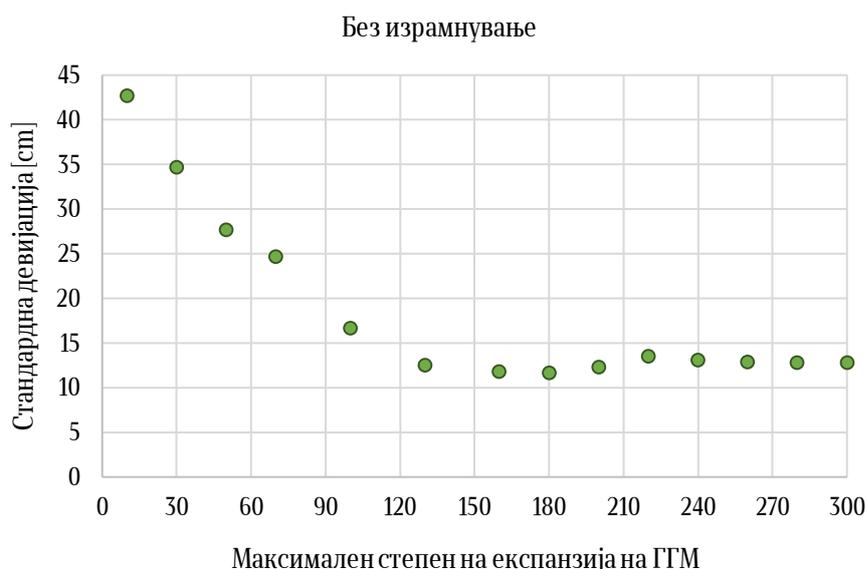
Со влезните податоци и променливите дефинирани во Табела 7.1 се пресметани 1176 модели на гравиметриски геоид. Сите променливи и влезни податоци имаат различни степени на влијание на конечните модели. Редоследно, потребно е да се направат следните пресметки:

- Менување на една променлива, додека останатите имаат константни вредности;
- Споредба на разликите помеѓу гравиметриски и геометриски геоид;
- Определување на  $STD$  за разликите (*no-fit*) и (*4 параметарски*);
- Променливата која има најмала  $STD$  при 4-параметарско израмнување се зема како фиксен параметар во следните пресметки.

Прикажувањето на влијанијата од променливите и влезните податоци ќе биде направено преку графикони. Во пресметките се прикажани влијанијата на една променлива кои фигурираат со најмала стандардна девијација.

- **Максимален степен на експанзија на ГГМ -  $n_{max}$**

Првата променлива која се проверува е максималниот степен на експанзија за ГГМ кој се користи во пресметките. Проверката се прави почнувајќи од степен  $n_{max} = 10, 30, 50, \dots, 300$ . За останатите променливи и влезни податоци се користат произволни вредности: радиус на интеграција -  $\psi_0 = 0.5^\circ$ , максимален степен на Стоксова модификација -  $L_{max} = 145$ , ГГМ - GOSG02S, ДЕМ - SRTM,  $\Delta g_{FA}$  - SRTM и  $\delta_{TC}$  - SRTM.



Слика 7.1 Влијание на максималниот степен на ГГМ, без израмнување

Од Слика 7.1 се забележува влијанието на  $n_{max}$  врз стандардната девијација кога не се врши израмнување на разликите. Директната споредба не доведува до заклучок дека со зголемување на максималниот степен на ГГМ, се намалува вредноста на стандардната девијација. За  $10 < n_{max} < 100$ , вредностите на  $STD$  се движат од 42.7 cm до 16.7 cm. Понатака, од степен 100 до степен 300, грешката има стабилни вредности кои варираат во рамки на 1.5 cm. Најмала е вредноста од 11.7 cm при степен  $n_{max} = 180$ .

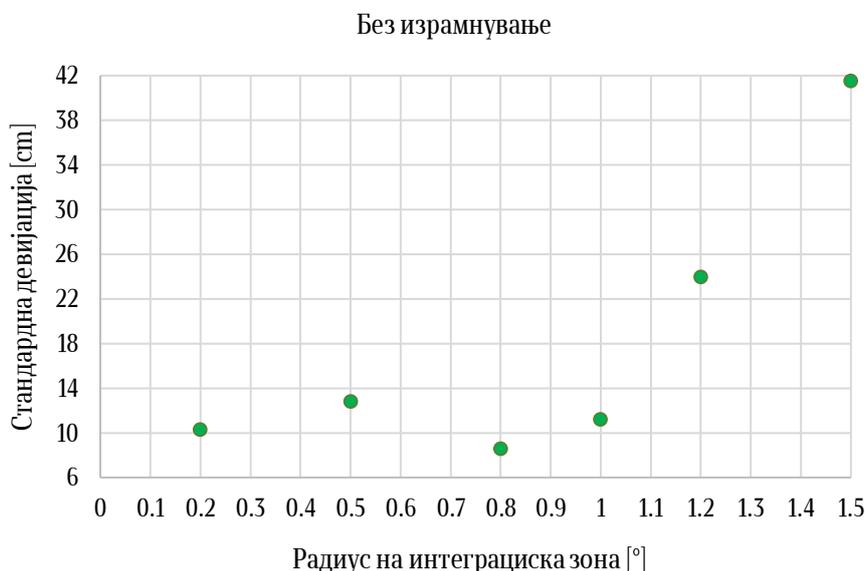
Втората споредба е направена преку користење на израмнување на разликите. Интересен е распоредот на вредностите за  $STD$ , кои има вредности од 11.9 и 11.8 cm. На Слика 7.2 е прикажан распоредот на грешките во однос на максималниот степен на експанзија. Практично, при ова израмнување, улогата на максималниот степен на ГГМ е помалку важна. Сепак, во понатамошните пресметки, ќе се користи максималниот степен со кој е дефиниран глобалниот модел.



Слика 7.2 Влијание на максималниот степен на ГГМ, со израмнување

- Радиус на интеграциска зона -  $\psi_o$

Следен параметар за споредба е дефинирањето на радиусот на интеграциската зона, слично како и кај *KTH* методата. За оваа споредба се користат следните останати параметри и влезни податоци:  $n_{max} = 300$ , максимален степен на Стоксова модификација -  $L_{max} = 145$ , ГГМ - *GOSG02S*, ДЕМ - *SRTM*,  $\Delta g_{FA}$  - *SRTM* и  $\delta_{TC}$  - *SRTM*.

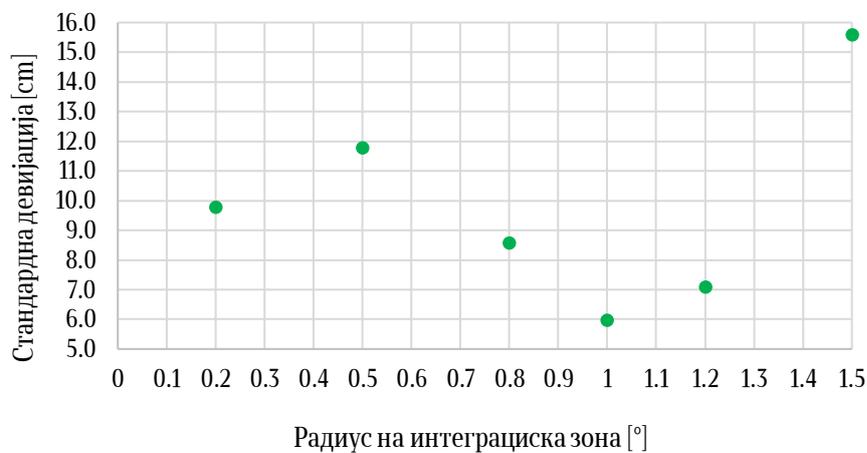


Слика 7.3 Влијание на интеграцискиот радиус, без израмнување

При споредбата без израмнување, се забележува дека изборот на овој параметар е доста важно. Пресметките се прават со менување на вредноста на радиусот -  $\psi_o = 0.2^\circ, 0.5^\circ, 1.0^\circ, 1.2^\circ, 1.5^\circ$ . Од Слика 7.3 се доаѓа до констатација дека при радиус од  $0.2^\circ$  до  $1^\circ$ , вредностите на грешката варираат од 8.6 до 12.8 cm. Најниска е вредноста при 1 степен

интеграциски радиус. Сепак, при следното зголемување на радиусот на  $1.2^\circ$ , грешката веќе се зголемува на 24 cm. Вредноста дополнително расте на 41.5 cm при радиус од  $1.5^\circ$ .

4 параметарско израмнување



Слика 7.4 Влијание на интеграциски радиус, со израмнување

При воведување на израмнување, вредностите за грешките се намалуваат. При радиус од  $0.2^\circ$  до  $0.5^\circ$  вредноста на грешката се движи од 9.8 до 11.8 cm. Понатака, при степен 0.8 до 1, грешката се спушта на 8.6 cm, а најмалата вредност и е 6 cm, соодветно. Со понатамошно зголемување на радиусот, расте и грешката, слично како и при споредбата без израмнување. Максималните вредности за грешката од 15.6 cm се добиваат при употреба на радиус од  $1.5^\circ$ .

Од двете споредби, доаѓаме до заклучок дека изборот на интеграциски радиус е доста важен, со оглед на брзата промена на вредностите за стандардната девијација, при промена на радиусот дури и од  $0.1$  степен. Понатака, ќе се користи  $\psi_o = 1^\circ$ .

- **Максимален степен на Стоксова модификација -  $L_{max}$**

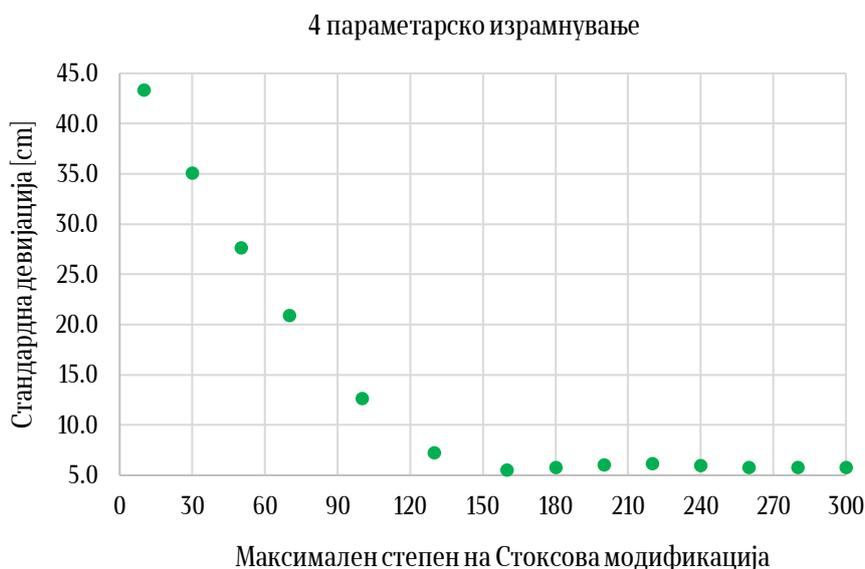
Третиот менлив параметар е максималниот степен на Стоксова модификација, со кој се дефинира влијанието на терестричките аномалии врз конечното решение. Во овие пресметки ќе се користат следните параметри и влезни податоци:  $n_{max} = 300$ ,  $\psi_o = 1^\circ$ ,  $GTM - GOSG02S$ ,  $DEM - SRTM$ ,  $\Delta g_{FA} - SRTM$  и  $\delta_{TC} - SRTM$ .

Без израмнување



Слика 7.5 Влијание на максимален степен на Стоксова модификација, без израмнување

Пресметките за оваа променлива се одвиваат со менување на степените како при изборот на  $n_{max}$ . Од промените на максималниот степен на модификација произлегуваат резултатите прикажани на графиконот од Слика 7.5. На неа се забележува дека при  $10 < L_{max} < 100$ , грешката се движи од 74.8 cm до 13.7 cm. Најниската вредност на грешката од 9 cm се добива при максимален степен 130. Со понатамошно зголемување на степенот, се зголемува и грешката. Таа варира од 12.1 cm до 17.3 cm. Следната споредба со воведување на параметарско израмнување, ќе ни овозможи дефинирање за понатамошна употреба на  $L_{max}$ .



Слика 7.6 Влијание на максимален степен на Стоксова модификација, со израмнување

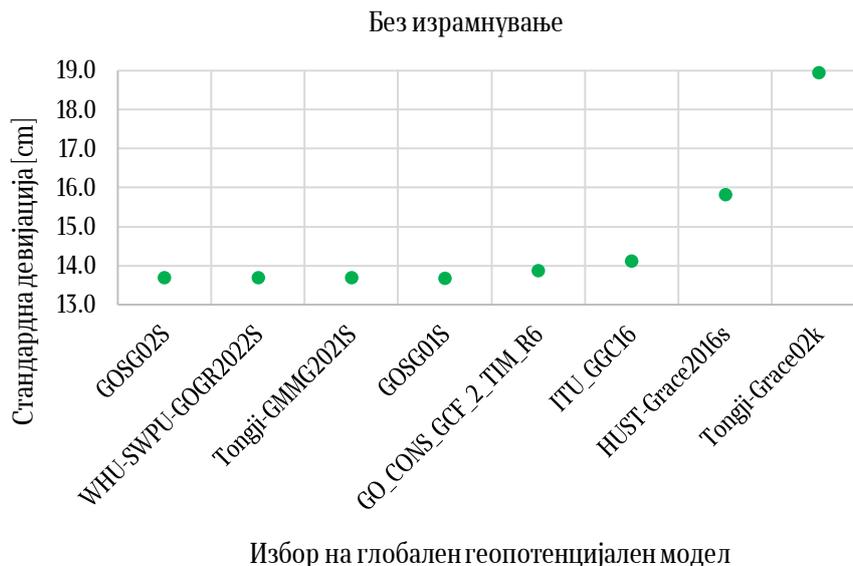
Резултатите од Слика 7.6 имаат сличен тренд како и при споредба без израмнување. Сепак, со отстранување на средините од разликите, се намалуваат вредностите на  $STD$ . Со користење на  $10 < L_{max} < 130$ , грешката се движи од 43.4 cm до 12.7 cm, соодветно. Понатамошното зголемување на степенот на модификација, ги намалува грешките. Најмала е грешката од 5.6 cm при користење на степен 160. Дополнителното зголемување резултира со стабилни вредности на  $STD$  кои се движат од 5.8 cm до 6.2 cm. Со оглед на анализите, во понатамошните пресметки ќе се користи  $L_{max} = 160$ .

- Избор на ГГМ

Првите влезни податоци кои се тестираат се ГГМ. За оваа споредба се користат следните останати параметри и влезни податоци:  $n_{max} = 300$ ,  $\psi_o = 1^\circ$ ,  $L_{max} = 145$ , ДЕМ - SRTM,  $\Delta g_{FA}$  - SRTM и  $\delta_{TC}$  - SRTM.

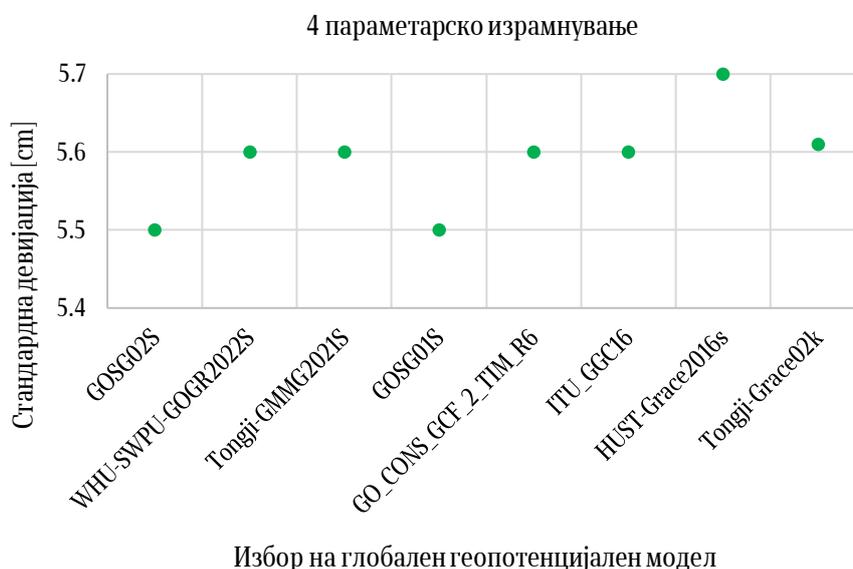
Од Слика 7.7 се забележуваат грешките со кои се карактеризираат сите користени ГГМ кога се врши споредба без израмнување. Резултатите укажуваат на четири модели: GOSG02S, WHU-SWPU-GOGR2022S, Tongji-GMMG2021S и GOSG01S кои генерираат иста грешка од 13.7 cm. Слични грешки имаат и моделите GO\_CONS\_GCF\_2\_TIM\_R6 - 13.9 cm и ITU\_GGC16 - 14.1 cm. Од друга страна, вредностите за  $STD$  кај GRACE моделите се нешто поголеми: HUST-GRACE2016s - 15.8 cm и Tongji-GRACE02k - 19 cm.

Генерално, при користење на GOCE и GOCE+GRACE моделите се добиваат помали грешки во однос на GRACE моделите. Дополнителен фактор во одлуката за кој ГГМ ќе се користи за дефинитивни пресметки е и воведувањето на израмнување на разликите.



Слика 7.7 Влијание на изборот на ГТМ, без израмнување

Со воведување на корекциска површина, се добиваат грешките прикажани на Слика 7.8. Сите модели резултираат со слични грешки кои варираат од 5.5 до 5.7 cm. Тоа значи дека дури и GRACE моделите имаат мали грешки. Сепак, најмалите грешки ги имаат GOCE моделите: GOSG01S и GOSG02S. Со оглед дека и во KTH методата се користи GOSG02S, па така и кај оваа метода, ќе се користи истиот тој модел.



Слика 7.8 Влијание на изборот на ГТМ, со израмнување

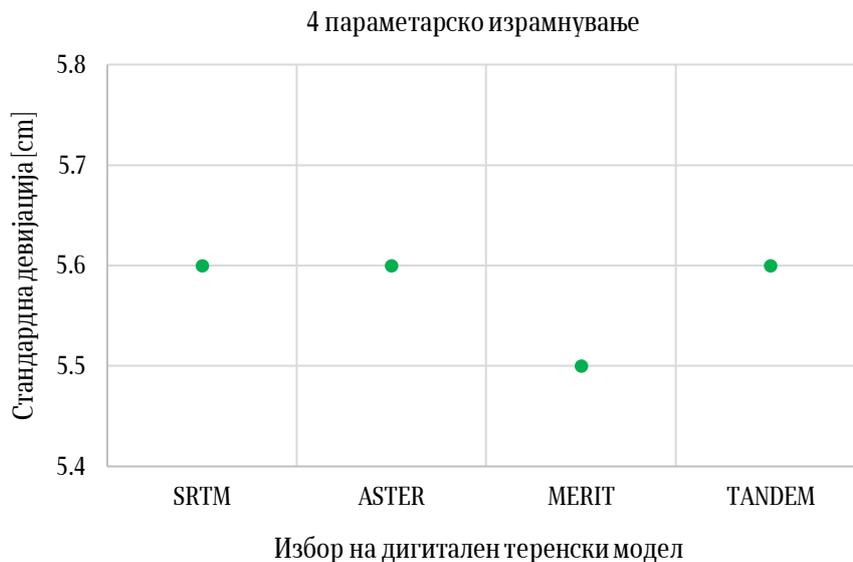
- **Избор на ДЕМ**

Вториот тип на податоци кои ги менуваме при проверката на решенија за гравиметриски геоид се ДЕМ. Останатите параметри кои се користат се:  $n_{max} = 300$ ,  $\psi_o = 1^\circ$ ,  $L_{max} = 145$ , ГТМ - GOSG02S,  $\Delta g_{FA}$  - SRTM и  $\delta_{TC}$  - SRTM.



Слика 7.9 Влијание на ДЕМ, без израмнување

При споредба на разликите, влијанијата на ДЕМ се прикажани на Слика 7.9. Суштински, кога не се прави израмнување, сите модели генерираат иста грешка од 13.7 cm. Затоа, за определување на тоа кој модел понатаму ќе најде примена, се прави и втората споредба преку вршење на израмнување.



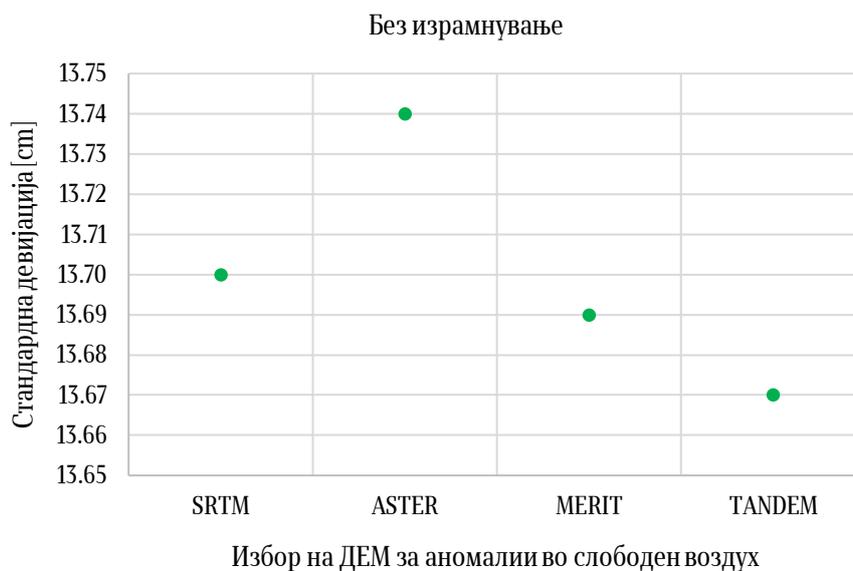
Слика 7.10 Влијание на ДЕМ, со израмнување

Со вториот графикон, се забележува дека преку отстранување на средната вредност од разликите, грешката се намалува за сите модели. Таа варира само со 0.1 cm, при што најмала е за моделот *MERIT*, со вредност од 5.5 cm.

Може да се даде заклучок дека изборот на ДЕМ не влијае значително во дефинитивното решение. Сите искористени теренски модели даваат слични резултати.

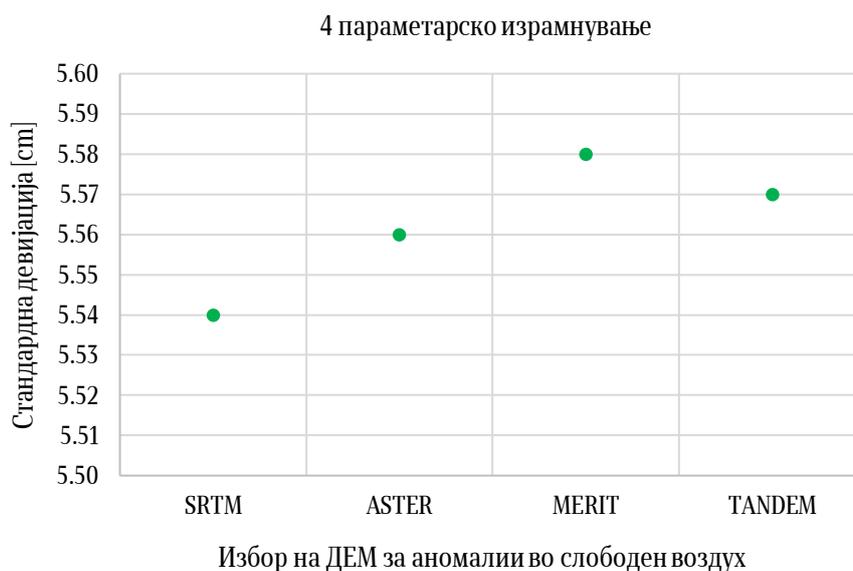
- Избор на ДЕМ за аномалии во слободен воздух

Следни податоци кои се анализираат е изборот на ДЕМ за дефинирање на аномалии во слободен воздух. Оваа статистичка анализа се прави, бидејќи изборот на среден (*averaged*) теренски модел има влијание при претворањето на интерполираните непотполни Бугеови аномалии во аномалии во слободен воздух. За пресметките се користат следните параметри и податоци:  $n_{max} = 300$ ,  $\psi_o = 1^\circ$ ,  $L_{max} = 145$ , ГГМ - GOSG02S, ДЕМ - MERIT и  $\delta_{TC}$  - SRTM.



Слика 7.11 Влијание на ДЕМ врз аномалии, без израмнување

Споредбата е направена со користење на истите четири модели кои беа користени при претходната споредба. Резултатите од анализите се прикажани на Слика 7.11. Разликите се доста мали помеѓу решенијата. Грешката се движи од 13.74 cm до 13.67 cm. Станува збор за разлики во делови од милиметри. Моделот *TANDEM* ја генерира најмалата, а моделот *ASTER* најголемата вредност за *STD*.

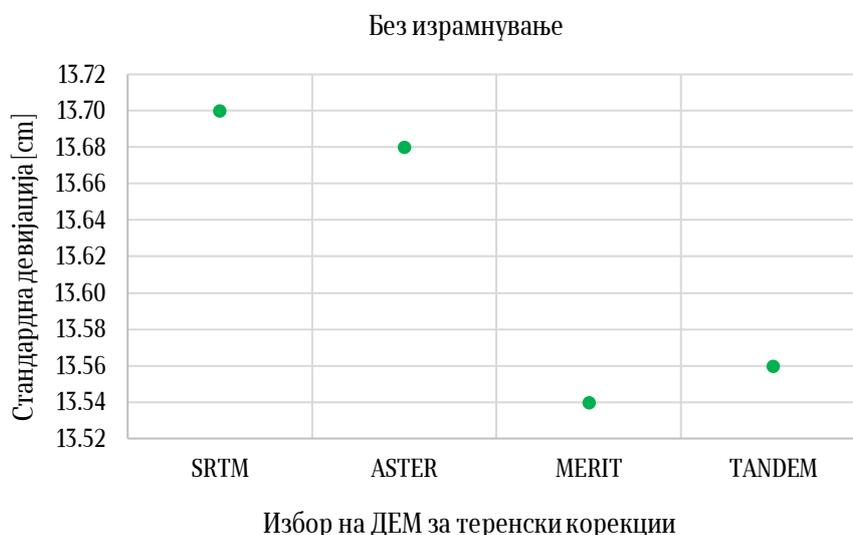


Слика 7.12 Влијание на ДЕМ врз аномалии, со израмнување

При примена на израмнување, се добиваат слични резултати помеѓу моделите. Грешката е намалена на вредности кои се движат од 5.54 cm до 5.58 cm. Како модел што има најмала *STD* е *SRTM*. Затоа тој ќе се користи за дефинирање на аномалиите во слободен воздух во понатамошните пресметки.

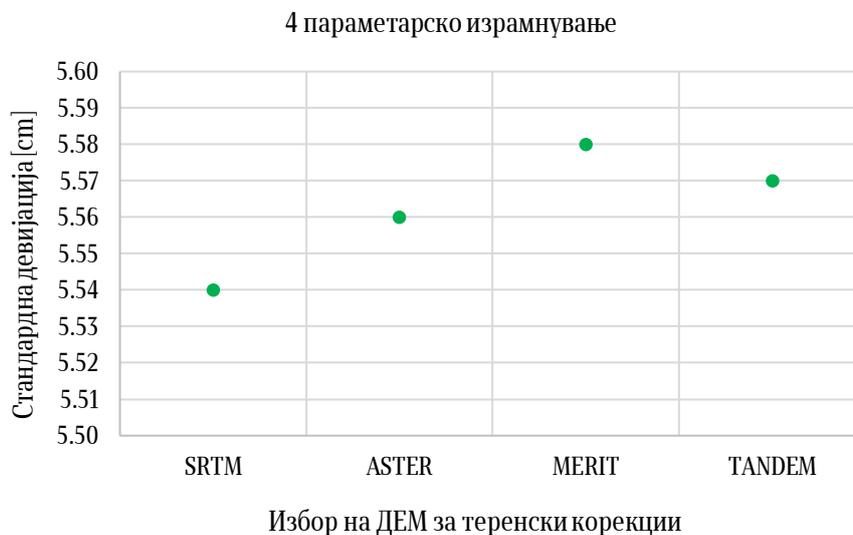
- **Избор на ДЕМ за теренски корекции**

Последните променливи во оваа метода кои ќе бидат анализирани се користењето на различни ДЕМ за добивање на теренските корекции за податочното подрачје. Теренските корекции се последните големина кои се третираат како посебни влезни податоци. Подетално истите беа објаснети во поглавјето 5.8. Другите податоци кои се користат во пресметките се:  $n_{max} = 300$ ,  $\psi_o = 1^\circ$ ,  $L_{max} = 145$ , ГГМ - GOSG02S, ДЕМ - MERIT и  $\Delta g_{FA}$  - SRTM.



Слика 7.13 Влијание на ДЕМ за теренски корекции, без израмнување

При анализа на резултатите од споредбите без израмнување, се доаѓа до заклучокот дека моделите *SRTM* и *ASTER* имаат поголема грешка, која варира од 13.70 до 13.68 cm. Другите два модели *MERIT* и *TANDEM* се карактеризираат со грешки од 13.54 и 13.56 cm.



Слика 7.14 Влијание на ДЕМ за теренски корекции, со израмнување

При израмнување на разликите, се добиваат резултатите прикажани на Слика 7.14. Вредностите за  $STD$  се идентични како при споредбата на користењето на различни ДЕМ за аномалии во слободен воздух кои се прикажани на Слика 7.12. Најмала грешка од 5.54 cm се добива при користење на моделот  $SRTM$ , додека најголема која изнесува 5.58 cm при користење на  $MERIT$  моделот. Се работи за разлики кои се занемарливи во делови од милиметри. Со тоа се потврдува дека влијанието на ДЕМ за теренските корекции не влијае на гравиметриските модели на геоид, слично како што беше проверено влијанието на ДЕМ при добивање на теренските корекции во поглавје 5.8.

После споредување на различни комбинации од параметри и влезни податоци, се доаѓа до заклучокот дека следните податоци генерираат најмала средна квадратна грешка:  $GGM - GOSG02S$ , ДЕМ -  $MERIT$ ,  $\Delta g_{FA} - SRTM$ ,  $\delta_{TC} - SRTM$ ,  $n_{max} = 300$ ,  $L_{max} = 160$ ,  $\psi_o = 1^\circ$ .

## 7.2 Дефинитивни модели со $CSH$ метода

Со констатирање на дефинитивните параметри и влезни податоци, можат да се пресметаат гравиметрскиот и хибридниот геоид според  $CSH$  методата. Ознаките на тие модели ќе бидат:  $MKSHG - 2025$  (гравиметриски модел) и  $MKSHH - 2025$  (хибриден модел). Слично како и во поглавје 6.2, се прави споредба на гравиметрскиот модел со 46те ГНСС-нивелмански точки. Оцената на точност со која се дефинираат вредностите на  $STD$  е прикажана во Табела 7.2:

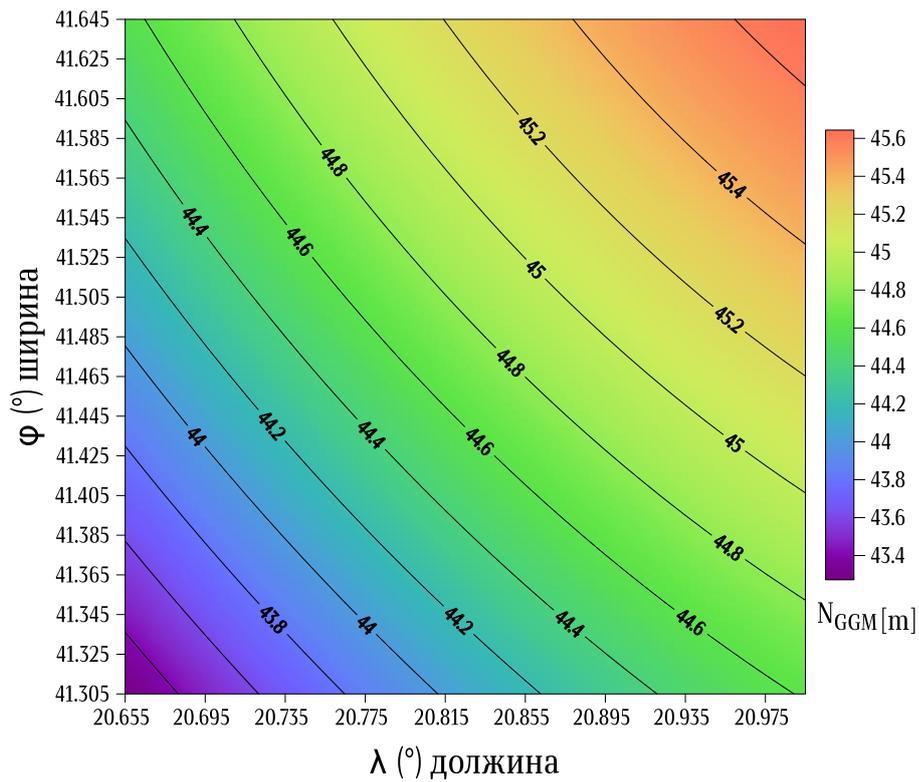
Табела 7.2 Оцена на точност на гравиметриски геоид, мерни единици [cm]

Модел	Израмнување	Мин.	Макс.	Средина	$STD$
$MKSHG-2025$	без израмнување	46.7	100.7	81.9	13.7
	4 параметарско	-19.3	14.8	0.0	5.55
	5 параметарско	-19.3	15.2	0.0	5.6

Најдобриот гравиметриски модел со  $CSH$  методата се карактеризира со  $STD=13.7$  cm при споредба без израмнување. Со отстранување на средните вредности и вршење на 4 параметарско израмнување на разликите, се добива вредноста од 5.5 cm за  $STD$ . Со користење на 5 параметарско израмнување, грешката не се влошува значително, само 0.1 cm.

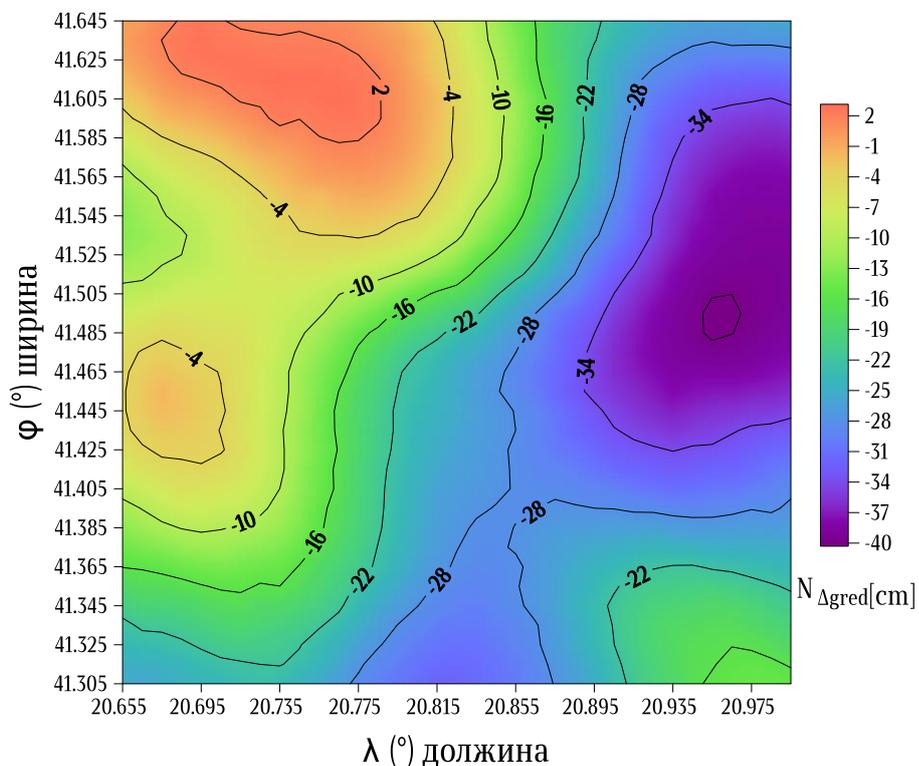
Дефинитивните гравиметриски ундулации се составени од три дела:  $N_{GGM}$  кој го дефинира придонесот од  $GGM$  во решенијата,  $N_{\Delta g_{red}}$  што претставува резидуали на геоидните ундулации од чекорот  $compute$  и  $N_{PITE}$  што го карактеризира директното влијание на топографијата врз геоидните ундулации. Со собирање на овие три компоненти се добиваат дефинитивните модели.

На Слика 7.15 се прикажани геоидните ундулации дефинирани од  $GGM$ . Нивното влијание врз дефинитивните, гравиметриски ундулации е најголемо. Вредностите со кои се карактеризираат истите се во ранг на метри. Најниските вредности од  $\approx 43$  m се во југозападниот дел, додека пак најголемите од  $\approx 45.5$  m се во североисточниот дел. Слично како и кај приближните ундулации од  $KTH$  методата прикажани на Слика 6.15, трендот на раст е сличен, во насока североисток. Иако ундулациите од двете слики се слични, сепак постојат разлики. Во  $CSH$  методата, овие ундулации се пресметуваат директно од  $GGM$ , додека во  $KTH$  методата, врз приближните ундулации, покрај  $GGM$ , влијаат и терестричките  $\Delta g_{FA}$ .



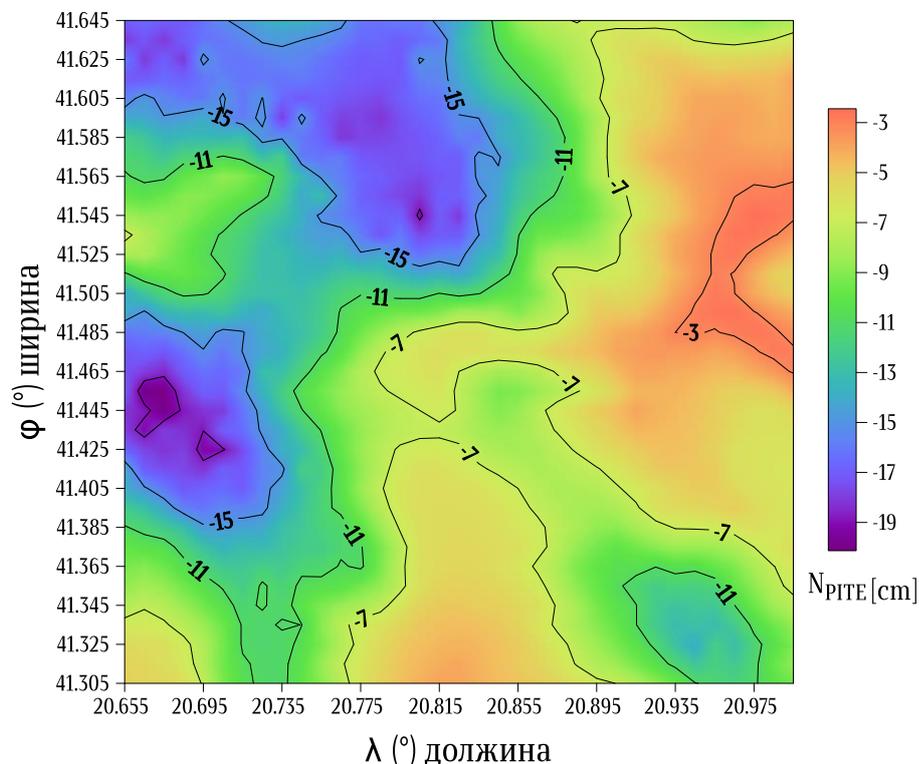
Слика 7.15 Геоидни ундулации од ГГМ,  $N_{GGM}$

Втора компонента од пресметките се  $N_{\Delta gred}$  кои се резидуали на геоидните ундулации. Тие се прикажани на Слика 7.16. Практично, овие големини го прикажуваат влијанието кое го имаат аномалиите врз геоидните ундулации од чекорот *compute*.



Слика 7.16 Резидуали на геоидни ундулации,  $N_{\Delta gred}$

Како што беше објаснето во поглавје 4.4.2.3, потребно е добивање на остатоци за аномалиите во слободен воздух, преку отстранување на влијанијата од ГГМ и ДЕМ моделите преку пресметка на нивните аномалии. Сепак, во предвид се земаат и влијанијата на теренот при Хелмертовата кондензијација преку внесување на поправки за секундарниот индиректен ефект, влијанието на атмосферските маси, како и елипсоидни корекции. Големината  $N_{\Delta g_{red}}$  се пресметува со изразот (4.56), каде резидуалите на аномалии  $\Delta g_{red}$  го имаат централното место се дефинираат со изразот (4.57). Вредностите за  $N_{\Delta g_{red}}$  се во ранг на сантиметри и се претежно со негативен предзнак. Географската распределеност на овие големини е слична како топографската,  $DWC$  и атмосферската корекција од  $KTH$  методот. Во пониските предели, вредностите имаат помали вредности кои достигнуваат и  $-40$  cm, додека пак во западниот и северозападниот дел се достигнуваат максималните вредности од  $-4$  cm и  $2$  cm, соодветно.



Слика 7.17 Примарно топографско влијание врз ундулации,  $N_{PITE}$

Третата компонента од пресметките е поправката поради Хелмертовата кондензација, која го прикажува примарното индиректно влијание на топографијата. Распоредот на овие корекции е прикажан на Слика 7.17. Вредностите на оваа корекција се во ранг на сантиметри, а соодносот на најголеми и најмали вредности во географска смисла соодветствува на елипсоидната корекција од  $KTH$  методата. За оваа корекција најголеми се вредностите во пониските предели, додека пак најмали во повисоките предели на западниот и северозападниот дел од предметното подрачје. Сепак, оваа корекција го прикажува примарното влијание на топографијата, па директно се прикажува колкаво намалување добиваат гравиметриските ундулации. Тоа би значело дека интензитетот на намалување на дефинитивните резултати е поголем, колку што е и теренот повисок. Во рамки на предметното подрачје,  $N_{PITE}$  има вредности од  $\approx -20$  cm до  $-2$  cm.

Може да се заклучи дека во оваа метода сите три главни компоненти влијаат значително во конечните геоидни ундулации, во рамки на метри и сантиметри.

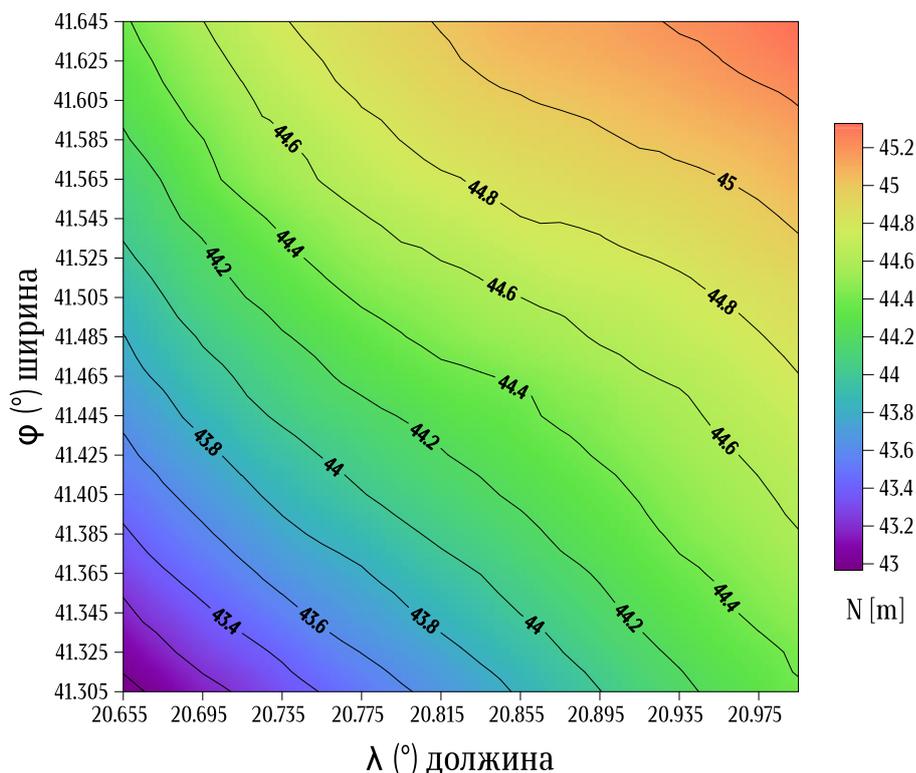
Дополнително, во табелата што следи се прикажани статистичките карактеристики на излезните компоненти во *CSH* методата:

Табела 7.3 Статистика за излезни компоненти во *CSH* метода

Големина	Мерни единици	Мин.	Макс.	Средина	STD
$N_{GGM}$	[m]	43.3	45.6	44.7	0.5
$N_{\Delta g_{red}}$	[cm]	-40.3	3.1	-19.0	12.2
$N_{PITE}$	[cm]	-20.1	-2.4	-9.7	4.4

Од анализата, се заклучува дека најголемо влијание имаат  $N_{GGM}$  вредностите кои се изразени во метри. После нив, влијаат  $N_{\Delta g_{red}}$  во рамки на сантиметри. Најмалку влијаат  $N_{PITE}$ , чии вредности се во сантиметри, исто така. Вредностите на  $N_{\Delta g_{red}}$  се поголеми од  $N_{PITE}$ , иако се во сантиметри и двете големини. Причината може да се бара во фактот што врз вредностите на  $N_{\Delta g_{red}}$  влијаат шест компоненти ( $\Delta g_{FA}$ ,  $\Delta g_{GGM}$ ,  $\Delta g_{DTE}$ ,  $\Delta g_{SITE}$ ,  $\Delta g_{DAE}$  и  $\Delta g_{ELL}$ ). Суштински, двете компоненти ги намалуваат вредностите на *GGM* ундулациите во најголем дел од предметното подрачје. Со едноставно сумирање на овие три компоненти се доаѓа до дефинитивните геоидни ундулации во *CSH* методата.

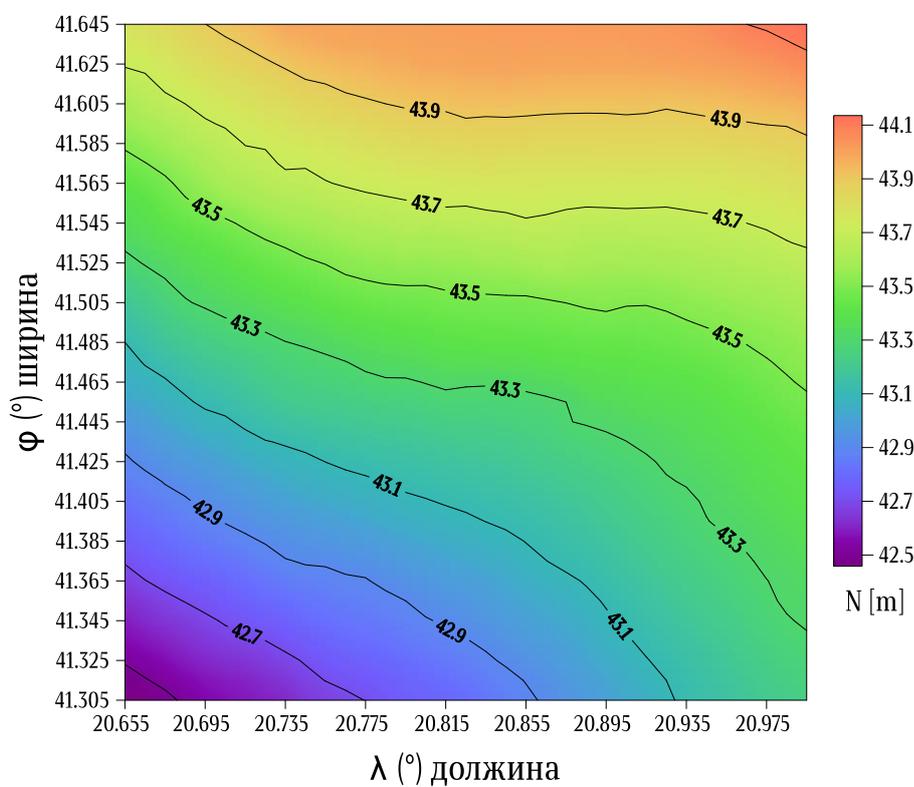
Дефинитивниот модел *MKSHG-2025* е прикажан на Слика 7.18:



Слика 7.18 Гравиметриски геоид *MKSHG-2025*

Моделот *MKSHG-2025* се карактеризира со вредности од приближно 43 m до 45.3 m, во најголем дел од предметното подрачје. Очекувано е намалување во вредности во однос на ундулациите од глобалните модели  $N_{GGM}$ , со оглед на негативниот предзнак на поголемиот дел од корекциите. Покрај гравиметрискиот модел, потребно е да се направи

вклопување на моделот во локалниот вертикален датум преку вметнување на корекциска површина и добивање на хибриден геоид. Тоа се постигнува со 4 параметарско израмнување, а хибридниот модел е прикажан на Слика 7.19:



Слика 7.19 Хибриден модел, *MKSHH-2025*

Со добивање на хибридниот модел, се забележува намалување на интерполираните вредности во однос на гравиметрискиот модел. Во југоисточниот дел од  $\approx 43$  m во *MKSHG-2025* се намалуваат ундулациите на  $\approx 42.5$  m во *MKSHH-2025*. Во североисточниот дел, поголемо е намалувањето од  $\approx 45.3$  m во гравиметрискиот модел на  $\approx 44.1$  m во хибридниот модел. Во продолжение е прикажана статистичка анализа на двата модела во Табела 7.4:

Табела 7.4 Вредности на гравиметриски и хибриден геоид, *CSH* метода, мерни единици [m]

Модел	Мин.	Макс.	Интервал	Средина	<i>STD</i>
<i>MKSHG-2025</i>	42.9	45.3	2.4	44.4	0.5
<i>MKSHH-2025</i>	42.4	44.1	1.7	43.4	0.4

Од прикажаната анализа, се забележува дека намалувањата кај хибридниот геоид не се однесуваат само на вредностите на ундулациите во однос на гравиметрискиот геоид. Тука, има генерално намалување и на другите статистички показатели. Интервалот во кој се движат ундулациите се намалува од 2.4 m на 1.7m, при вклопување во локалниот датум. Слично и средината од вредностите се намалува за 1 m, од 44.4m на 43.4 m. Како главен показател за добро пресметани вредности на ундулациите е малата средна квадратна грешка со која се карактеризираат и двата модели. Таа изнесува 0.5 m кај *MKSHG-2025* и 0.4 m кај *MKSHH-2025*.

## 8. СПОРЕДБЕНА АНАЛИЗА НА МЕТОДИ

Во претходните две поглавја беа детални обработени двете методи за пресметување на гравиметриски модели на геоид. Беа искористени повеќе променливи параметри и влезни податоци за да се најде решението кое генерира најмала стандардна девијација. Дефинитивните гравиметриски модели беа споредени со геометриските геоидни ундулации добиени од 46те ГНСС-нивелмански во рамки на предметното подрачје. Тоа овозможува квантитативно да се изврши оцена на точност. Сепак, покрај таквата анализа, се генерирани интерполирани гравиметриски модели прикажани на Слика 6.20 и Слика 7.18 за двете методи. Гравиметриските модели немаат практично значење доколку не се поврзат со локалниот вертикален датум, па затоа се појавува и потребата од хибриден модел кој е добиен со локално вклопување на гравиметрискиот геоид. Начините за добивање на хибриден геоид беа објаснети во поглавје 4.2, а практичните примери беа пресметани и прикажани на Слика 6.21 и Слика 7.19.

Со цел подобро разбирање на добиените модели, во ова поглавје ќе бидат направени дополнителни четири споредби. Две споредби ќе бидат направени помеѓу гравиметриските геоиди, а две ќе бидат на хибридниите модели. За две споредби ќе бидат користени 46 ГНСС-нивелмански точки на кои ќе им бидат определени вредностите од моделите, додека другите две споредби ќе бидат направени помеѓу интерполираните геоидни ундулации во рамки на предметното подрачје.

### 8.1 Споредби на моделите

- Споредба на гравиметриски модели на ГНСС-нивелмански точки

Започнуваме со првата споредба на двата гравиметриски модели со вредности од истите за ГНСС-нивелманските точки.

Табела 8.1 Споредба на гравиметриски модели на 46 точки, мерни единици [cm]

Модел	Израмнување	Минимум	Максимум	Средина	STD
	Без израмнување	-19.3	-12.1	-15.1	1.2
MKKG-MKSHG	4 параметарско	-2.3	4.4	0.0	1.2
	5 параметарско	-2.5	3.8	0.0	1.2

Во Табела 8.1 се прикажани статистичките анализи на разликите од гравиметриските модели. Се работи за резултати кои прикажуваат доста блиски совпаѓања на вредностите од 46 точки. Разликите се карактеризираат со *STD* од 1.2 cm при споредба без израмнување. После отстранување на средините и намалување на вредностите за минимум и максимум на разликите, грешката останува идентична без оглед кој модел на израмнување се применува.

- Споредба на хибридни модели на ГНСС-нивелмански точки

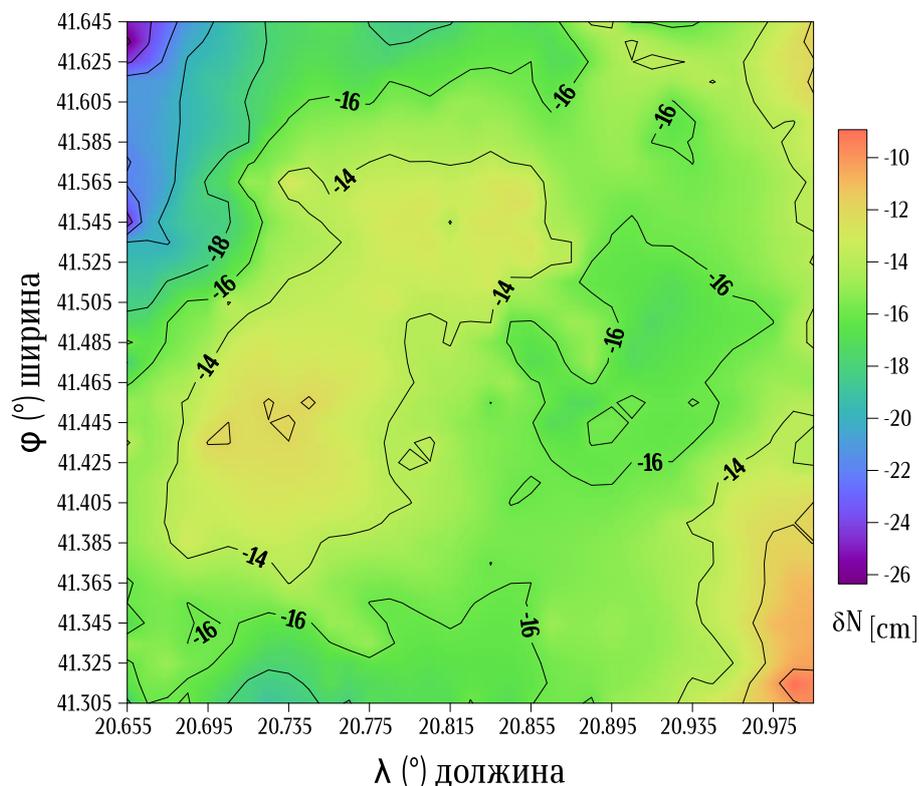
Втората споредба се прави со хибридниите модели од двете методи со вредностите за ГНСС-нивелманските точки.

Со оваа споредба ќе се добие нумеричка споредба на веќе вклопените модели. Тоа би значело дека при оваа споредба нема да се применува никакви корекциски површини, бидејќи можните грешки се отстранети со вметнување на 4 параметарско израмнување.

За разликите помеѓу хибридните модели се добиваат следните вредности: минимум (-5.5 cm), максимум (2.7 cm), средина (0 cm) и *STD* (1.6 cm). Табела 8.1 Малите вредности за минималните и максималните разлики го потврдуваат претходното вклопување на хибридните геоиди, заедно со вредноста за средината која е еднаква на нула. Разликите се карактеризираат со *STD* од 1.6 cm, што докажува дека и хибридните модели имаат мали грешки при меѓусебна споредба, слично како и гравиметриските модели.

- Споредба на интерполирани гравиметриски модели

Покрај директно споредување на разликите на определени точки, се врши и споредба на интерполираните вредности од гравиметриските модели во рамки на предметното подрачје.

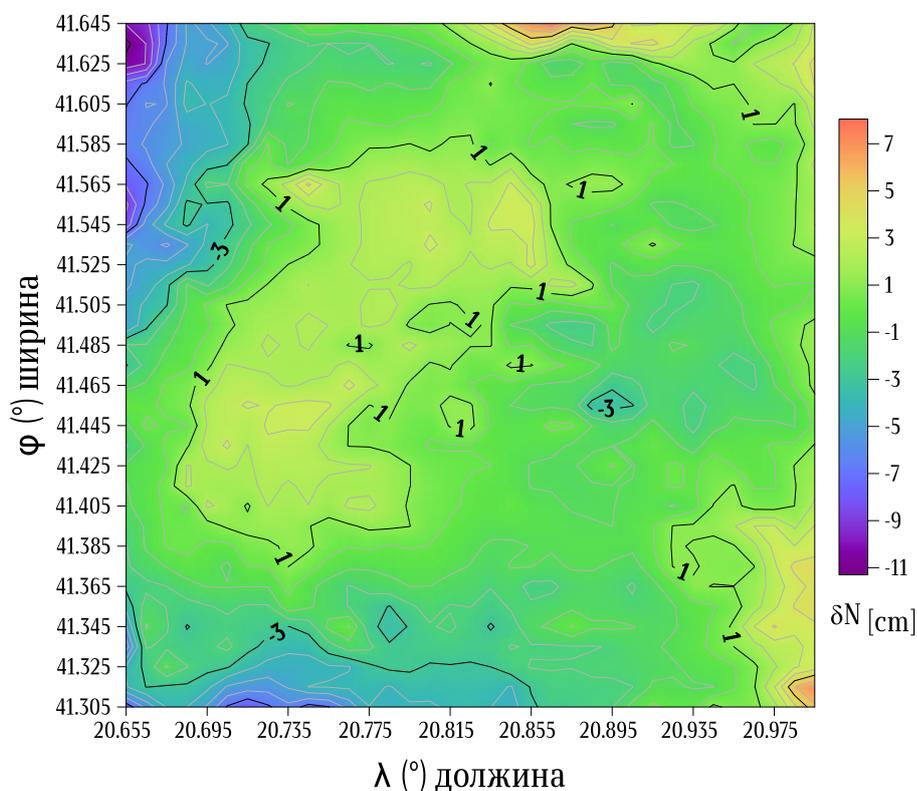


Слика 8.1 Споредба на интерполирани гравиметриски разлики

Од Слика 8.1 се забележува географската распореденост на разликите помеѓу гравиметриските модели добиени од двата метода. Вредностите на интерполираните разлики се следни: минимум (-26.4 cm), максимум (-8.9 cm), средина (-15.2 cm) и *STD* (2.0 cm). Ако се изврши споредување на интерполираните разлики со разликите за 46те точки, се забележуваат слични вредности. Разликите се во минималните и максималните вредности. Од сликата се забележува дека генерално тие разлики се во граничните зони од предметното подрачје. Во северозападниот дел тие се најголеми, а во југоисточниот дел се најмали по апсолутна вредност. Генерално, во пределите каде се наоѓаат ГНСС-нивелманските точки, разликите на моделите се речиси идентични.

- Споредба на интерполирани хибридни модели

Последна споредба е на хибридните модели, преку нивните вредности на-grid точките. Кај оваа споредба се очекуваат минимални разлики, со оглед дека се работи за два модели кои се ослободени од систематски грешки, при нивното вклопување во локалниот вертикален систем.



Слика 8.2 Споредба на интерполирани хибридни модели

Од Слика 8.2 се забележуваат минимални разлики при споредба на моделите. За предметното подрачје се добиени следните вредности за разликите: минимум (-11.3 cm), максимум (8.0 cm), средина (-0.4 cm) и *STD* (2.4 cm). Со споредбите се добиваат разлики од 1 cm речиси на целото подрачје. Екстремните вредности се достигнуваат слично како и кај споредбата на гравиметриските модели, во крајните подрачја (максимални во северозападниот дел и минимални во југоисточниот дел).

Од направените споредби, се доаѓа до заклучок дека и двата методи резултираат со речиси идентични грешки при споредување со ГНСС-нивелманските точки. Во продолжение е табелата каде е прикажана статистичката анализа за методите.

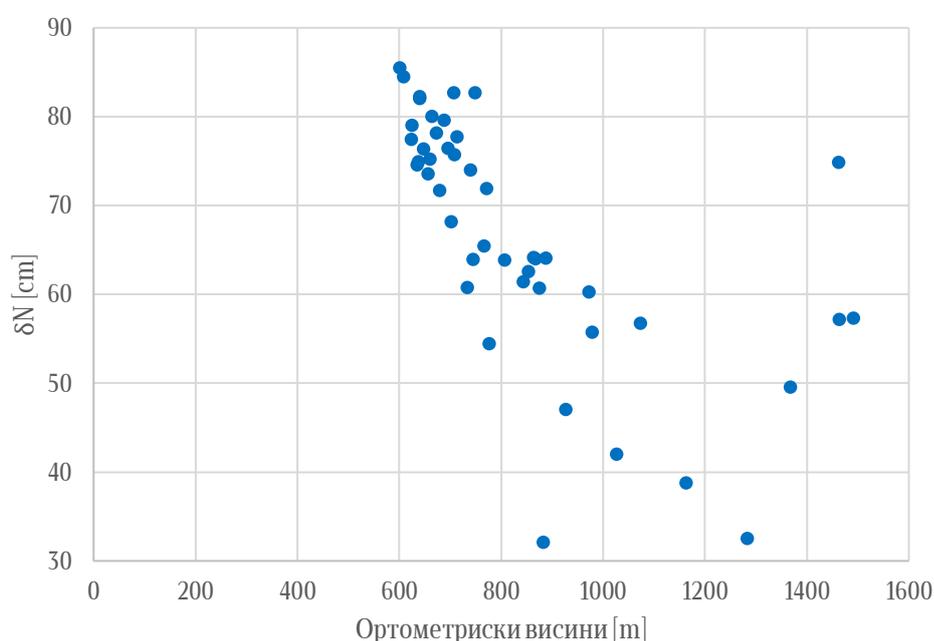
Табела 8.2 Статистичка анализа за методите на 46 точки, мерни единици [cm]

Модел	Израмнување	Минимум	Максимум	Средина	<i>STD</i>
<i>KTH</i>	Без израмнување	32.13	85.6	66.9	13.7
	4 параметарско	-21.4	12.5	0.0	5.53
	5 параметарско	-21.5	12.7	0.0	5.6
<i>CSH</i>	Без израмнување	46.7	100.7	81.9	13.7
	4 параметарско	-19.3	14.8	0.0	5.55
	5 параметарско	-19.3	15.2	0.0	5.6

Со оглед на фактот дека методите имаат речиси идентични грешки при сите три споредби, тогаш мора да се направи споредба и на десетти дел од милиметарот, каде *KTH* методот има грешка од 5.53 cm, додека *CSH* има грешка од 5.55 cm. Тоа значи дека би се избрал моделот *KTH* како дефинитивен модел. Во продолжение ќе бидат прикажани графиците за однесувањето на разликите  $\delta N = N_{\text{ГНСС-нивелман}} - N_{\text{МККГ}}$  во однос на различни променливи: геоидни ундулации, ортометриски висини, геодетска ширина, и геодетска должина. За пресметка на разликите се користат 46те *ГНСС-нивелманските* точки.

- Однесување на гравиметриски  $\delta N$  во однос на различни променливи

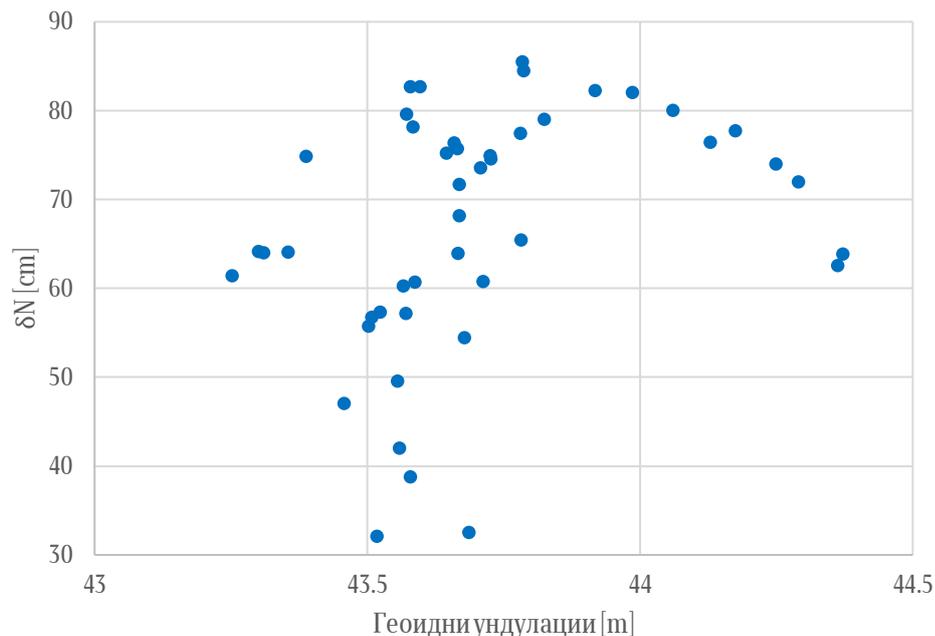
Прва е споредбата на разликите во однос на топографскиот распоред на предметното подрачје.



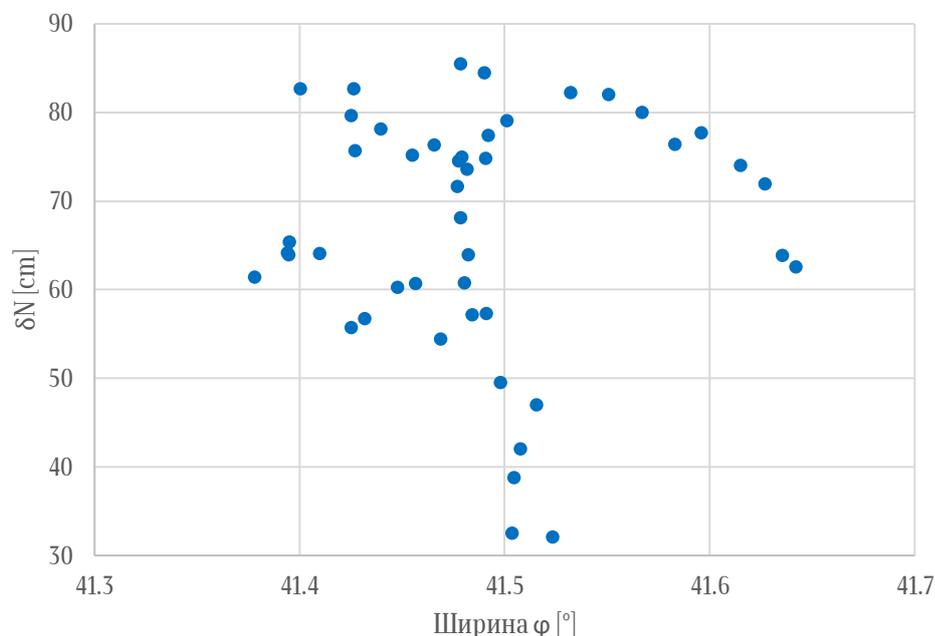
Слика 8.3 Разликите  $\delta N$  како функција од ортометриските висини

Од Слика 8.3 се забележува дека во пониските предели разликите се поголеми отколку во повисоките. Вредностите се движат од  $\approx 85$  cm до  $\approx 55$  cm при ортометриски висини од  $\approx 600$  m до  $\approx 1000$  m. Со движење кон повисоките точки, вредностите се намалуваат. Минималните вредности се на висина од  $\approx 1300$  m.

Втора е споредбата на разликите како функција од геоидните ундулации. Тие се прикажани на Слика 8.4. Минималните вредности се движат околу геоидни ундулации од 43.5 m, додека пак највисоките при ундулации од 43.8 m. Нема одреден тренд на раст или опаѓање на разликите како функција од ундулациите. Генерално, пониските вредности се концентрирани околу ундулација од 43.5 m. Од друга страна, повисоки вредности на разликите од 60 до 80 cm, се поизразени за ундулации од 43.3 m и 44.3 m.

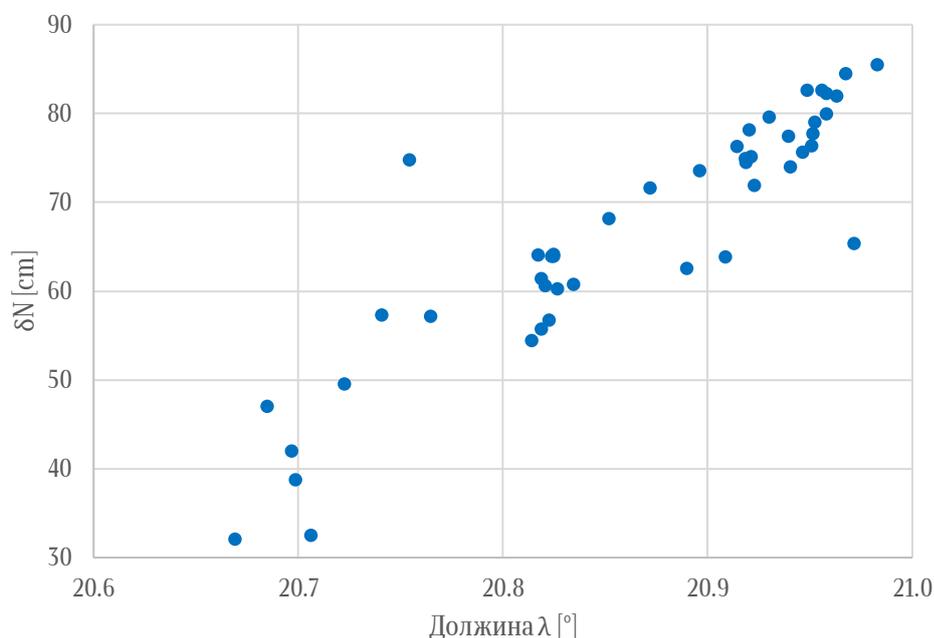
Слика 8.4 Разликите  $\delta N$  како функција од геоидните ундулации

Следна е зависноста на разликите од геодезската ширина. Тие разлики се прикажани на Слика 8.5. Најмали се разликите при ширина од 41.5 степени. Сепак, во рамки на таа вредност за ширината има и поголеми вредности за разликите. Најголемиот дел од разликите се во интервалот од 60 до 80 cm. Може да се заклучи дека разликите немаат одреден тренд во однос на растењето на геодезската ширина.

Слика 8.5 Разликите  $\delta N$  како функција од геодезската ширина

Следна е анализата на разликите во функција од геодезската должина. Тие разлики се прикажани на графикот од Слика 8.6. Може да се забележи дека најголемите разлики се наоѓаат помеѓу 20.9 и 21 степени. Најмалите разлики се однесуваат на западниот дел

од предметното подрачје. Тука може да се воспостави зависност дека разликите растат со растење на геодетската должина. Интересно е да се напомене дека разликите се најголеми во најниските предели од подрачјето.



Слика 8.6 Разликите  $\delta N$  како функција од геодетската должина

## 8.2 Преглед

Во поглавјата 6 и 7 беа извршени практични пресметки со користење на методите *KTN* и *CSH*. Во поглавјето 8 беа извршени споредбени анализи на моделите добиени со двата метода. За двете методи беа направени анализи на влијанието на влезните параметри и влезните податоци врз конечните резултати кои се валидираат со ундулации добиени со мерени елипсоидни и ортометриски висини.

- ***KTN* метода**

Оваа е стохастичка кај која беа испитани влијанијата на степенот на експанзија на *GGM* кои се користат. Резултатите укажуваат на тоа дека повисоките максимални степени на експанзија треба да се користат. При  $10 < n_{max} < 120$ , вредностите за грешките се најголеми, а после тоа се до степен 300, имаат речиси константни вредности.

Изборот на интеграциски радиус има најголемо влијание во конечните резултати. Премали и преголеми вредности резултираат со големи промени во дефинитивните модели. Потребно е постепено менување на радиусот при пресметките, бидејќи и мали промени генерираат големи промени во резултатите.

Трет е изборот на варијанса за терестричките аномалии, чиј избор на влијание врз резултатите е од иста важност како и интеграцискиот радиус. Повторно, со постепени промени на влезните вредности, се пресметуваат дефинитивните грешки.

Изборот на методот на пресметка за модификациските параметри е третиот најважен елемент, каде се можни три влезни решенија, а најдобро се покажа пристрасното.

Први влезни податоци кои во најголема мера влијаат во одредување на приближните геоидни ундулации, а со тоа и на дефинитивните решенија е изборот на ГТМ. Од пресметките се покажува дека *GOCE* моделите се подобри од комбинираниите (*GOCE+GRACE*) и од *GRACE* моделите. Влијанијата на добро избран ГТМ достигнуваат и до 1 cm.

Следни влезни податоци се ДЕМ моделите, при што беа анализирани четири модели и сите се карактеризираа со предизвикување мали промени во конечните решенија.

Применети беа ДЕМ моделите при дефинирање и на влезните аномалии во слободен воздух во пресметките. Генерално, сите модели ги задоволија условите и генерираа речиси идентични излезни грешки при споредбите. Разликите би се појавиле во дел од милиметарот, што во овој докторски труд е ирелевантно.

- **CSH метода**

Втората метода е детерминистичка, со јасни математички модели кои не дозволуваат доза на случајност во излезните податоци, за разлика од *KTH* методата.

Кај оваа метода бројот на влезни параметри е помал, но бројот на влезни податоци е поголем во однос на *KTH* методата.

Прв влезен параметар е изборот на максимален степен на експанзија за ГТМ. Резултатите се слични како и кај првата метода. Грешките се намалуваат од степен 10 до степен 150. После тоа имаат речиси константни вредности.

Втор параметар е интеграцискиот радиус. Неговата чувствителна природа се докажува и во оваа метода, со оглед на фактот дека при промена од 0.2 степени, грешките растат од 11.2 на 24 cm кога не се применуваат израмнувања. Дури и со израмнување, таа грешка е поголема од 1 cm. Изборот за овој параметар е најважен во овој метод.

Последен влезен параметар е изборот на максималниот степен на Стоксова модификација. Проверките се прават слично како и со максимален степен за избраниот ГТМ. За вредности од 0 до 120 степени грешките се од 75 до 14 cm. Најниска е вредноста од 9 cm при максимален степен 160. Со понатамошно зголемување на  $L_{max}$ , повторно растат вредностите за *STD*.

Кај оваа метода, покрај ГТМ, ДЕМ, аномалии, како влезни податоци се и теренските корекции. Изборот на ГТМ повторно ја потврдува доминацијата на *GOCE* моделите во однос на *GRACE* и комбинираниите модели.

Теренските модели играат важна улога како влезни податоци. Еден од моделите прикажа подобра точност при користење за определување на геоидните ундулации во однос на останатите, што значи дека сите четири модели треба да се проверат во пресметките.

Влијанието на теренските модели за определување на влезните аномалии во пресметките докажува дека изборот е важен, со оглед на фактот дека постојат мали разлики во резултатите.

Последниот сет на податоци кои се користат се теренските корекции за кои постојат повеќе начини за нивно определување. Генерално, вредностите за корекциите се секогаш мали во пониските предели, па сите модели генерираат слични корекции. Со оглед на фактот дека се подготвуваат неколку модели кои влегуваат во пресметките, треба да се води сметка да не се оптоваруваат софтверите со преголеми снимки, кои ќе го забават или во некои случаи и оневозможат процесирањето.

- Споредба на методи

На крајот, истражувачот мора да се определи за еден модел кој ќе го користи. Во овој случај минимални разлики постојат меѓу моделите од двете методи, со што предност се дава на моделот добиен со *KTH* методата.

Генерално споредени, по два влезни параметри се најважни, од кои еден е заеднички. Радиусот на интеграција е најважниот елемент во пресметување на геоидот.

Во *KTH* методата, втор најважен параметар е начинот на пресметка на модификациските параметри, додека кај *CSH* методата тоа е изборот на  $L_{max}$ .

Понатака, изборот на варијанси на терестрички аномалии е трет најважен влезен параметар за *KTH* методата, додека пак кај двете методи, подеднакво важен е и изборот на максимален степен на експанзија на *ГГМ*.

Од влезните податоци, во двете методи најважен е изборот на *ГГМ*, каде во двата случаи изборот паѓа на *GOSG02S*.

Најмало е влијанието на *ДЕМ* и во двата метода, со разлики помали од милиметар. Причината за малото влијание, може да се побара и во фактот дека се работи за релативно мало предметно подрачје.

Како последен дел од ова поглавје, во табелата која следи се прикажани сите потребни софтверски алатки и кориснички сервиси за подготовка на влезните податоци во двете методи:

Табела 8.3 Софтвер и кориснички сервиси за подготовка на податоци

Податоци-задача	Метода	Софтвер-извор
<i>ГНСС</i> -нивелмански точки	<i>KTH, CSH</i>	(AREC, 2025)
Терестрички аномалии $\Delta g_{FA}$	<i>KTH, CSH</i>	(AREC, 2025)
Податочна подрачје $\Delta g_{FA}$	<i>KTH, CSH</i>	(GFZ, 2025a)
<i>ГГМ</i>	<i>KTH, CSH</i>	(ICGEM, 2025)
<i>ДЕМ</i>	<i>KTH, CSH</i>	(USGS, 2025), (ASTER, 2025), (Yamazaki et al., 2017), (TanDEM, 2024)
Теренски корекции	<i>CSH</i>	модул 'TC' - GRAVSOFТ
Интерполација	<i>KTH, CSH</i>	Golden Surfer
Модел на гравиметриски геоид	<i>KTH</i>	LSMSSOFT (Abbak & Ustun, 2014)
	<i>CSH</i>	CSHSOFT (Abbak et al., 2024)
Статистичка анализа на геоид	<i>KTH, CSH</i>	модул 'comparison' во LSMOFT, CSHSOFT
Анализа на гريد модели	<i>KTH, CSH</i>	Golden Surfer
Генерирање на хибридни модели	<i>KTH, CSH</i>	модул 'fitgeoid' - GRAVSOFТ
Претворање на гريد модели во различни формати	<i>KTH, CSH</i>	Global Mapper Pro

## 9. ЗАКЛУЧОК И ПРЕПОРАКИ ЗА ПОНАТАМОШНИ ИСТРАЖУВАЊА

Целта на овој докторски труд, поставена уште во воведниот дел, е дефинирање на локален геоид со примена на ГНСС-нивелман. Подрачјето е одбрано во зависност од распоредот на топографските маси. Со истражување, два региона со динамичен распоред беа како можност за предметно подрачје: источниот или западниот дел од Република Македонија. Изборот беше западниот дел да се дефинира како подрачје за локален геоид. Тоа значи користење на гравиметриски, нивелмански и сателитски мерења кои се добиени од Агенцијата за катастар на недвижности.

Методите кои се користени во овој труд се најактуелни во физичката геодезија и се користени во најголем дел при дефинирање на локални и регионални модели на геоид. Станува збор за детерминистички и стохастички методи. Тоа значи дека за подрачјето се користени суштинско различни методологии, за да се определи кои се можностите за нивна примена во локални рамки. Со двете методи се прикажаа солидни излезни резултати и дека истите можат да бидат имплементирани за локална намена. Крајните гравиметриски модели беа проверени во однос на геометриските ундулации, а како краен показател беше стандардната девијација која за *KTH* методата изнесува 5.53 cm, додека за *CSH* методата е 5.55 cm.

Со оглед на методите кои беа применети, определувањето на геоид предизвикува проширување на предметното подрачје за 1 степен геодетска ширина и должина во секоја насока. Тоа значи зафаќање на делови од соседните земји, чии податоци не беа достапни. Затоа се врши дополнување на базата со податоци од јавните сервиси за гравиметриски мерења. Тие податоци се дополнуваат со користење на *GTM* за чие архивирање се надлежни *ICGEM*.

Откако е дефинирана конечната база на гравиметриски податоци во вид на аномалии во слободен воздух, втор чекор беше определување на резолуција за излезниот модел на геоид. Избраната резолуција ја дефинира подготовката на сите податоци кои влегуваат во определување на геоидот. Во овој труд резолуцијата е 36" x 36", што одговара на 0.01° x 0.01°. Изборот на резолуцијата е произволен, меѓутоа не може да се променува постојано како влезните параметри во методите, бидејќи тоа повлекува различни подготовки на сите влезни податоци. Се работи за големи датотеки за чие спремање се издвојува значително време. Резолуцијата треба да биде избрана така што доволно добро ќе го прикажува предметното подрачје, преку внимавање да не се прескокнат одредени топографски промени. Од друга страна, преголема резолуција може да го преоптовари процесот на подготовка на податоци и пресметка на геоидот. Затоа истражувачот сам ја определува резолуцијата, а изборот се прави така што нејзините вредности во секунди се цели броеви.

Покрај аномалиите на Земјина тежа, други влезни податоци се *GTM* (за двата метода), *DEM* (за двата метода) и теренските корекции (*CSH* метода).

*GTM* се модели кои го прикажуваат Земјиното поле на тежа преку различни сателитски мисии. Од моделите кои се користеа, најдобри резултати се добиваат со *GOCE* моделите. Од применетите *GOCE* модели, недвојбено најмала грешка се добива со *GOSG02S*.

Примената на теренски модели е важна, бидејќи покрај топографските прикази во форма на ортометриски висини за гريد центрите, тие влијаат и на аномалиите на Земјина тежа, како и на теренските корекции кои се влезни податоци во *CSH* методата. За *KTH* методата, најдобар модел е *SRTM1"*, додека пак најмала грешка во *CSH* методата се добива при користење на *MERIT* моделот.

При дефинирање на аномалиите на Земјина тежа, во постапката на интерполирање се користат средни ДЕМ модели, за да се избегнат појави на можни издигнувања или вдлабнатини како последица на грешки во сигналите емитирани од сателитите. Тука, во двата методи, најмала е грешката при користење на моделот *SRTM*.

Креирањето на теренските корекции е подложно на користење повеќе ДЕМ прикази во различни резолуции: детален, груб и референтен. Беа направени пресметки со користење на систем на квадрати и цилиндри (концентрични кружници) кои резултираа со слични GRID мрежи на теренски корекции, со разлики во рамки на 2 mGal. Поради побрзите пресметки со модулот *TC* на софтверот *GRAVSOF*T се користеше систем на квадрати за дефинитивните пресметки.

Најважни елементи кои влијаат на гравиметрискиот модел се изборот на радиус на интеграција за двата методи (*KTH* -  $\psi_o = 1.2^\circ$ , *CSH* -  $\psi_o = 1^\circ$ ). Во *KTH* методата, втор најважен параметар е изборот на стохастичка модификација на параметрите  $s_n$  и  $b_n$  (пристрасен,  $\nu = 1$  во *LSMSSOF*T). Трет елемент е изборот на грешката со која се карактеризираат терестричките аномалии преку избор на нивната варијанса која претставува квадрат од стандардната девијација ( $C = 7 \text{ mGal}^2$ ).

Во *CSH* методата, втор најважен елемент е изборот на максимален степен на Стоксова модификација ( $L_{max} = 160$ ).

Гравиметриските модели се вклопени во рамки на локалниот датум преку внесување на параметарски израмнување за разликите од споредбите на геометрискиот и гравиметрискиот модел. За израмнување се користени модели на 4 и 5 параметри. Од истражувањата, слични се резултатите, но моделот со 4 параметри генерира најмали грешки, кој и најчесто е користен во геодетската литература.

Споредба е направена и помеѓу GRID моделите на гравиметриските и хибридниите модели. Грешката со кои се карактеризираат разликите е 2 cm за гравиметриските и 2.4 cm за хибридниите модели.

### Препораки за понатамошни истражувања

При подготовка на податоците и нивно имплементирање со цел добивање на локален модел на геоид, повеќе идеи за понатамошни истражувања се појавија:

- Со оглед дека се работи за локален геоид во рамки на овој докторски труд, се појавува идејата за имплементирање на методологиите на територија на цела држава;
- Ажурирање на базата на гравиметриски мерења со дополнителни згуснувања во понатамошните кампањи, со посебен акцент на доволен број мерења во повисоките, планински предели;
- Дополнителни пресметувања со користење на други достапни методи за локален геоид кои се базираат на пристапот *RCR* (*LSC*, *FFT*). Некои од тие методи немаат потреба од дополнително зголемување на предметното подрачје (*LSC*). Тоа би ја олеснило дополнително подготовката на влезните податоци;
- Користење на понови ДЕМ како *FabDEM* и *FathomDEM* за истражување на нивното влијание врз конечните резултати. Претпоставката е дека влијанието на поголемите подрачја од ДЕМ моделите е доста поголемо отколку при локална имплементација;

- Во рамки на докторскиот труд беше користена константна густина на Земјината кора  $\rho = 2670 \text{ kg-m}^3$  (КТН метода). Може да се искористат и други, глобални модели на густина како што е моделот UNB (*University of New Brunswick*), затоа што најчесто густината за одредено подрачје не е константна, туку истата треба детално да биде испитана. Интересно е откривање на нејзиното влијание врз конечните резултати;
- Уште една можност е наместо користење на глобални модели, да се користат геофизички и геолошки податоци за креирање на локални модели на густина на Земјина кора и нивна имплементација во пресметките со КТН методата.

## 10. ЛИТЕРАТУРА

- Abbak, R. A. (2011). *Evaluation of Global Earth Potential Models Using Spectral Methods and Local Improvement for Geoid Determination*. (PhD). Selcuk University, Konya, Turkey.
- Abbak, R. A., Erol, B., & Ustun, A. (2012). Comparison of the KTH and remove-compute-restore techniques to geoid modelling in a mountainous area. *Computers & Geosciences*, 48, 31-40. DOI:<https://doi.org-10.1016-j.cageo.2012.05.019>
- Abbak, R. A., Goyal, R., & Ustun, A. (2024). A user-friendly software package for modelling gravimetric geoid by the classical Stokes-Helmert method. *Earth Science Informatics*. DOI:<https://doi.org-10.1007-s12145-024-01328-0>
- Abbak, R. A., Goyal, R., Ustun, A., & Olgun, S. (2025). Combined effects of terrain corrections and deterministic modifiers on the Stokes-Helmert geoid over sophisticated topography. *Acta Geodaetica et Geophysica*, 60(1), 29-51. DOI:<https://doi.org-10.1007-s40328-025-00460-7>
- Abbak, R. A., & Ustun, A. (2014). A software package for computing a regional gravimetric geoid model by the KTH method. *Earth Science Informatics*, 8(1), 255-265. DOI:<https://doi.org-10.1007-s12145-014-0149-3>
- Akyilmaz, O., Ustun, A., Aydin, C., Arslan, N., Doganalp, S., Guney, C., . . . Yagci, O. (2016). High Resolution Gravity Field Determination and Monitoring of Regional Mass Variations using Low-Earth Orbit Satellites.
- AREC. (2022). *75 years of Geodetic Administration and 95 years of Geodetic Surveying.*: Republic of North Macedonia Agency for Real Estate Cadastre
- AREC. (2025). Agency for Real Estate Cadastre of R. North Macedonia. <https://www.katastar.gov.mk>
- ASTER. (2025). Japanese Space System Server. <https://gdemdl.aster.jspacesystems.or.jp>
- Babak, O., & Deutsch, C. (2008). Statistical approach to inverse distance interpolation. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 23, 543-553. DOI:<https://doi.org-10.1007-s00477-008-0226-6>
- Barthelmes, F. (2013). *Definition of functionals of the geopotential and their calculation from spherical harmonic models*. (1610-0956). Retrieved from Potsdam: [https://gfzpublic.gfz-potsdam.de/pubman-item-item\\_104132](https://gfzpublic.gfz-potsdam.de/pubman-item-item_104132)  
urn:nbn:de:kobv:b103-0902-26
- Barthelmes, F. (2018). Global Models. In E. Grafarend (Ed.), *Encyclopedia of Geodesy* (pp. 1-9). Cham: Springer International Publishing.
- Benahmed Daho, S. A., Kahlouche, S., & Fairhead, J. D. (2006). A procedure for modelling the differences between the gravimetric geoid model and GPS-levelling data with an example in the north part of Algeria. *Computers & Geosciences*, 32(10), 1733-1745. DOI:<https://doi.org-10.1016-j.cageo.2006.04.003>
- Briggs, I. C. (1974). Machine contouring using minimum curvature. *GEOPHYSICS*, 39(1), 39-48. DOI:<https://doi.org-10.1190-1.1440410>
- Brockmann, J. M., Schubert, T., Mayer-Gürr, T., & Schuh, W.-D. (2019). The Earth's gravity field as seen by the GOCE satellite - an improved sixth release derived with the time-wise approach (GO\_CONS\_GCF\_2\_TIM\_R6). *GFZ Data Services*. DOI:<https://doi.org-10.5880-ICGEM.2019.003>
- Bruns, H. (1878). Die Figure der Erde. *Publ. Preuss.*
- Burrough, P. A. (1986). *Principles of Geographical Information Systems for Land Resources Assessment*. Oxford.: Oxford University Press.
- Chen, J., Zhang, X., Chen, Q., Shen, Y., & Nie, Y. (2022). *Static Gravity Field Recovery and Accuracy Analysis Based on Reprocessed GOCE Level 1b Gravity Gradient Observations*. Paper presented at the EGU General Assembly 2022, Vienna, Austria.
- Chen, Q., Shen, Y., Francis, O., Chen, W., Zhang, X., & Hsu, H. (2018). Tongji-Grace02s and Tongji-Grace02k: High-Precision Static GRACE-Only Global Earth's Gravity Field Models Derived by Refined Data Processing Strategies. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 123(7), 6111-6137. DOI:<https://doi.org-10.1029-2018JB015641>

- Croneborg, L., Saito, K., Matera, M., McKeown, D., & van Aardt, J. (2020). *Digital Elevation Models* de Gooijer, B. M., Havinga, J., Geijselaers, H. J. M., & van den Boogaard, A. H. (2024). Radial basis function interpolation of fields resulting from nonlinear simulations. *Engineering with Computers*, 40(1), 129-145. DOI:<https://doi.org/10.1007/s00366-022-01778-4>
- Dobrovolny, P. (2013). *Overview of interpolation methods*. Masaryk University. Brno, Czech Republic.
- Draper, N., & Smith, H. (1981). *Applied Regression Analysis*: Wiley-Interscience.
- Duquenne, H., Jiang, Z., & Lemarié, C. (1995). *Geoid Determination and Levelling by GPS: Some Experiments on a Test Network*. Paper presented at the Gravity and Geoid, Berlin, Heidelberg.
- El-Ashquer, M., Al-Ajami, H., Zaki, A., & Rabah, M. (2020). Study on the selection of optimal global geopotential models for geoid determination in Kuwait. *Survey Review*, 52(373), 373-382. DOI:<https://doi.org/10.1080-00396265.2019.1611256>
- Ellmann, A., & Sjöberg, L. E. (2004). Ellipsoidal correction for the modified Stokes formula. *Boll Geod Sci Aff*(No. 3).
- EOC. (2025). Earth Observation Center (EOC) of the German Aerospace Center (DLR). <https://geoservice.dlr.de-web>
- Erol, B., Isik, M. S., & Erol, S. (2020). An Assessment of the GOCE High-Level Processing Facility (HPF) Released Global Geopotential Models with Regional Test Results in Turkey. *Remote Sensing*, 12, 586. DOI:<https://doi.org/10.3390-rs12030586>
- ESA. (2025a). EGG. <https://earth.esa.int-eogateway-instruments-egg-description>
- ESA. (2025b). GOCE. <https://earth.esa.int-eogateway-missions-goce>
- ESA. (2025c). GRACE Instrument Parameters. <https://earth.esa.int-eogateway-missions-grace>
- ESA. (2025d). SSTI. <https://earth.esa.int-eogateway-instruments-ssti-description>
- Fei, Z., & Sideris, M. (2000). A new method for computing the ellipsoidal correction for Stokes's formula. *Journal of Geodesy*, 74, 223-231. DOI:<https://doi.org/10.1007/s001900050280>
- Foerste, C. B., Sean.L.; Abrykosov, Oleh; Lemoine, Jean-Michel; Marty, Jean Charles; Flechtner, Frank; Balmino, Georges; Barthelmes, Franz; Biancale, Richard. (2014). EIGEN-6C4 The latest combined global gravity field model including GOCE data up to degree and order 2190 of GFZ Potsdam and GRGS Toulouse.
- Forsberg, R., & Tscherning, C. C. (1981). The use of height data in gravity field approximation by collocation. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 86(B9), 7843-7854. DOI:<https://doi.org/10.1029-JB086iB09p07843>
- Forsberg, R., & Tscherning, C. C. (2014). GRAVSOFIT - Geodetic Gravity Field Modelling Programs. In.
- Franke, R., & Neilson, G. (1980). Smooth interpolation of large sets of scattered data. *International Journal of Numerical Methods in Engineering.*, 15, 1691-1704.
- Gauss, C. F. (1828). Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona durch Beobachtungen am Ramsdenschen Zenithsector. . *Vanderschoeck und Ruprecht, Göttingen*, 48-50.
- GFZ. (2025a). Calculation of Gravity Field Functionals on Ellipsoidal Grids. <https://icgem.gfz-potsdam.de-calcgrid>
- GFZ. (2025b). Essential and unique: the GRACE missions. <https://www.gfz.de-en-spotlights-grace>
- GGOS. (2025). Satellite-based gravity field observations. <https://geodesy.science-item-satellite-gravimetry>
- Godah, W., Krynski, J., & Szelachowska, M. (2018). The use of absolute gravity data for the validation of Global Geopotential Models and for improving quasigeoid heights determined from satellite-only Global Geopotential Models. *Journal of Applied Geophysics*, 152, 38-47. DOI:<https://doi.org/10.1016-j.jappgeo.2018.03.002>
- Gospodinov, S., Peneva, E., Penev, P., Sechkov, K., Dimeski, S., & Starchevich, M. (2015, 17-21 May 2015). *Basic Gravimetric Network of Republic Macedonia - a new reality*. Paper presented at the FIG Working Week 2015 - From the Wisdom of the Ages to the Challenges of the Modern World, Sofia, Bulgaria.
- Hagiwara, Y. (1976). A new formula for evaluating the truncation error coefficient. *Bulletin géodésique*, 50(2), 131-135. DOI:<https://doi.org/10.1007-BF02522312>

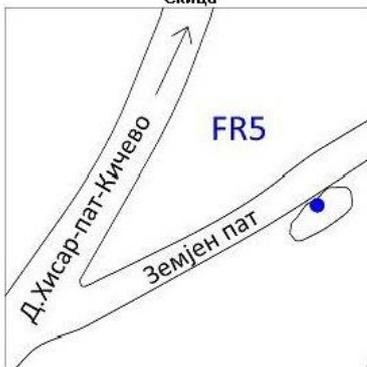
- Heiskanen, A. W., & Moritz, H. (1967). *Physical Geodesy*. San Francisco, USA: W.H.Freeman and Co Ltd.
- Heiskanen, A. W., & Vening Meinesz, F. A. (1958). *The Earth and its gravity field*: McGraw-Hill, New York
- Hirt, C., Yang, M., Kuhn, M., Bucha, B., Kurzmann, A., & Pail, R. (2019). SRTM2gravity: An Ultrahigh Resolution Global Model of Gravimetric Terrain Corrections. *Geophysical Research Letters*, 46(9), 4618-4627. DOI:<https://doi.org/10.1029-2019GL082521>
- Hofmann-Wellenhof, B., & Moritz, H. (2005). *Physical Geodesy*. Austria
- Huang, J., Véronneau, M., & Pagiatakis, S. D. (2003). On the ellipsoidal correction to the spherical Stokes solution of the gravimetric geoid. *Journal of Geodesy*, 77(3), 171-181. DOI:<https://doi.org/10.1007-s00190-003-0317-6>
- ICGEM. (2025). Static Models. <https://icgem.gfz-potsdam.de-tom-longtime>
- Ince, E. S., Barthelmes, F., Reißland, S., Elger, K., Förste, C., Flechtner, F., & Schuh, H. (2019). 15 years of successful collection and distribution of global gravitational models, associated services and future plans. - Earth System Science Data.
- Jekeli, C. (1981). *The Downward Continuation to the Earth's Surface of Truncated Spherical and Ellipsoidal Harmonic Series of the Gravity and Height Anomalies*. (PhD). The Ohio State University, Ohio, Columbus.
- Jekeli, C., & Serpas, J. G. (2003). Review and numerical assessment of the direct topographical reduction in geoid determination. *Journal of Geodesy*, 77, 226-239. DOI:<https://doi.org/10.1007-s00190-003-0320-y>
- Johannessen, J. (1999). The four candidate Earth Explorer core missions. Report for mission selection. 1. Gravity Field and Steady-state Ocean Circulation Mission.
- JPL. (2025). Grace satellites in clean room. <https://grace.jpl.nasa.gov-resources-33-grace-satellites-in-clean-room>
- Kasapovski, F., Gospodinov, S., Srbinoski, Z., Dimov, L., Bogdanovski, Z., & Gegovski, T. (2018). Vertical Crustal Movements in Seismic Active Regions. *Scientific Journal of Civil Engineering*, 7(2).
- Kaula, W. (1966). *Theory of Satellite Geodesy: Applications of Satellites to Geodesy*: Blaisdell Pub. Co
- Kotsakis, C., & Sideris, M. (1999). On the Adjustment of Combined GPS-Levelling-Geoid Networks. *Journal of Geodesy*, 73, 412-421. DOI:<https://doi.org/10.1007-s001900050261>
- Krdžalić, D., & Abbak, R. A. (2023). A precise geoid model of Bosnia and Herzegovina by the KTH method and its validation. *Survey Review*, 55(393), 513-523. DOI:<https://doi.org/10.1080-00396265.2022.2163361>
- Lee, D., & Schachter, B. (1980). Two Algorithms for Constructing a Delaunay Triangulation. *International Journal of Parallel Programming*, 9, 219-242. DOI:<https://doi.org/10.1007-BF00977785>
- Listing, J. B. (1873). Über unsere jetzige Kenntniss der Gestalt und Grösse der Erde: Aus den Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften. *Dieterich*.
- Matheron, G. (1963). *Principles of geostatistics*
- Merson, R., & King-Hele, D. (1958). Use of artificial satellites to explore the earth's gravitational field: Results from sputnik 2 (1957β). *Nature* 182:640-641. DOI:<https://doi.org/10.1038-182640a0>
- Moritz, H. (1980). *Advanced Physical Geodesy*: Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe
- Moritz, H. (1980). Geodetic Reference System 1980. *Bull Geod* 54:395-405.
- NASA. (2003). Studying the Earth's Gravity from Space: The Gravity Recovery and Climate Experiment (GRACE). *Goddard Space Flight Center*.
- NASA. (2025). GRACE. <https://grace.jpl.nasa.gov-mission-grace>
- NOAA, NASA, & USAF. (1976). US standard atmosphere. US Government Printing Office. Washington DC.
- Nyoka, C. J., Din, A. H. M., Pa'suya, M. F., & Omar, A. H. (2022). Rigorous evaluation of global geopotential models for geoid modelling: A case study in Kenya. *Journal of African Earth Sciences*, 194, 104612. DOI:<https://doi.org/10.1016-j.jafrearsci.2022.104612>
- Odalovic, O. (2009). Study for the leveling and gravimetric network in R. Macedonia, . In. Skopje: Agency for real estate cadastre of Macedonia.

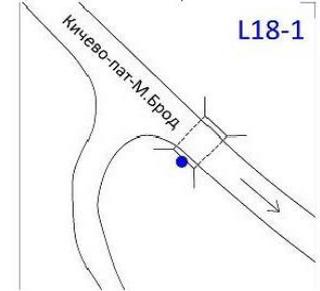
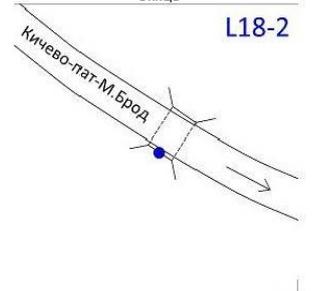
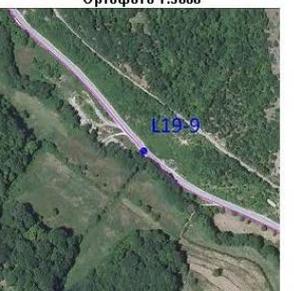
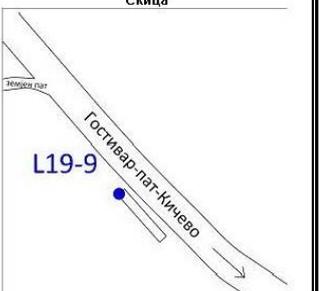
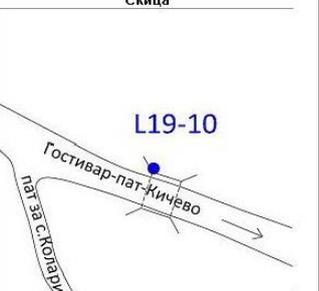
- Odalović, O. (2006). *Geoid determination in Serbia*. Paper presented at the The Adria Microplate: GPS Geodesy, Tectonics and Hazards, Dordrecht.
- Olgun, S., Üstün, A., & Akyılmaz, O. (2023). tc-cylinder: An optimized algorithm for accurate topography effect from high-resolution digital elevation models. *Computers & Geosciences*, 170, 105264. DOI:<https://doi.org-10.1016/j.cageo.2022.105264>
- Paraskevas, M., Papadopoulos, N., & Ampatzidis, D. (2023). Geoid model determination for the Hellenic area "Hellas Geoid 2023". *Acta Geodaetica et Geophysica*, 58(3), 345-371. DOI:<https://doi.org-10.1007/s40328-023-00416-9>
- Paul, M. K. (1973). A method of evaluating the truncation error coefficients for geoidal height. *Bulletin Géodésique (1946-1975)*, 110(1), 413-425. DOI:<https://doi.org-10.1007/BF02521951>
- Pavlis, N. K., Holmes, S. A., Kenyon, S. C., & Factor, J. K. (2012). The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008). *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 117(B4). DOI:<https://doi.org-10.1029-2011JB008916>
- Peneva, E. (2002). A Preliminary Gravimetric Geoid Model for the Territory of Bulgaria.
- Pham, H. T., Claessens, S., Kuhn, M., & Awange, J. (2023). Performance evaluation of high-ultra-high-degree global geopotential models over Vietnam using GNSS-leveling data. *Geodesy and Geodynamics*, 14(5), 500-512. DOI:<https://doi.org-10.1016/j.geog.2023.03.002>
- Rapp, R. H. (1982). Degree variances of the Earth's potential, topography and its isostatic compensation. *Bulletin géodésique*, 56(2), 84-94. DOI:<https://doi.org-10.1007/BF02525594>
- Serpas, J. G. (2004). The Direct Effect on Geoid Computations. *Uniciencia* 21, 21, 145-149.
- Shepard, D. (1968). *A two-dimensional interpolation function for irregularly spaced data*. . Paper presented at the In Proceedings of the 1968 23rd ACM National Conference.
- Sibson, R. (1981). *A brief description of natural neighbor interpolation*.
- Sjöberg, L. E. (1991). Refined least squares modification of Stokes' formula. *Manuscr Geod*, 16, 367-375. DOI:<https://doi.org-10.1007-s00190-020-01405-4>
- Sjöberg, L. E. (1999). The IAG approach to the atmospheric geoid correction in Stokes' formula and a new strategy. *Journal of Geodesy*, 73(7), 362-366. DOI:<https://doi.org-10.1007-s001900050254>
- Sjöberg, L. E. (2003a). Ellipsoidal corrections to order  $e^2$  of geopotential coefficients and Stokes' formula. *Journal of Geodesy*, 77, 139-147. DOI:<https://doi.org-10.1007-s00190-003-0321-x>
- Sjöberg, L. E. (2003b). A general model for modifying Stokes' formula and its least-squares solution. *Journal of Geodesy*, 77(7), 459-464. DOI:<https://doi.org-10.1007-s00190-003-0346-1>
- Sjöberg, L. E. (2003c). A solution to the downward continuation effect on the geoid determined by Stokes' formula. *Journal of Geodesy*, 77(1), 94-100. DOI:<https://doi.org-10.1007-s00190-002-0306-1>
- Sjöberg, L. E. (2004). A spherical harmonic representation of the ellipsoidal correction to the modified Stokes formula. *Journal of Geodesy*, 78, 180-186. DOI:<https://doi.org-10.1007-s00190-004-0378-1>
- Sjöberg, L. E. (2007). The topographic bias by analytical continuation in physical geodesy. *Journal of Geodesy*, 81, 345-350. DOI:<https://doi.org-10.1007-s00190-006-0112-2>
- Sjöberg, L. E., & Bagherbandi, M. (2017). *Gravity Inversion and Integration* (1 ed.): Springer Cham.978-3-319-50298-4
- Sjöberg, L. E., & Nahavandchi, H. (1999). On the indirect effect in the Stokes-Helmert method of geoid determination. *Journal of Geodesy*, 73, 87-93. DOI:<https://doi.org-10.1007-s001900050222>
- Sjöberg, L. E., & Nahavandchi, H. (2000). The atmospheric geoid effects in Stokes' formula. *Geophysical Journal International*, 140(1), 95-100. DOI:<https://doi.org-10.1046-j.1365-246x.2000.00995.x>
- Sneeuw, N. (2000). A Semi-Analytical Approach to Gravity Field Analysis from Satellite Observations.
- Somigliana, C. (1929). Teoria generale del campo gravitazionale dell'ellissoide di rotazione. *Memorie della Società Astronomia Italiana*, 4.
- Srbinoski, Z. (2008). *Physical Geodesy*. Skopje: Faculty of Civil Engineering - Skopje
- Srbinoski, Z. (2015). *Measurement Systems in Real Estate Management*: Faculty of Civil Engineering - Skopje
- Stokes, G. G. (1849). On the variation of gravity on the surface of the Earth. . *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 8, 672-695.

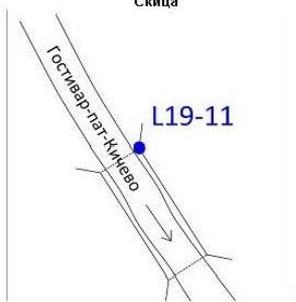
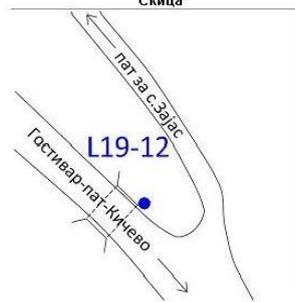
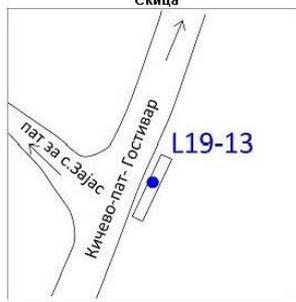
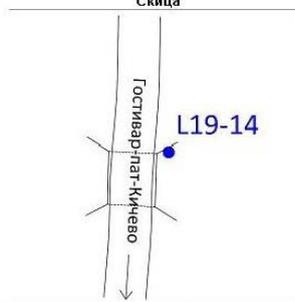
- TanDEM. (2024). TanDEM-X Global Digital Elevation Model (DEM). . <https://tandemx-science.dlr.de>
- Tenzer, R., Novák, P., Prutkin, I., Ellmann, A., & Vajda, P. (2009). Far-zone contributions to the gravity field quantities by means of Molodensky's truncation coefficients. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 53, 157-167.
- Thacker, W., Zhang, J., Watson, L., Birch, J., Iyer, M., & Berry, M. (2010). Algorithm 905: Modified Shepard Algorithm for Interpolation of Scattered Multivariate Data. *ACM Trans. Math. Softw.*, 37.
- Torge, W., & Müller, J. (2012). *Geodesy*: Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin-Boston
- Tscherning, C. C. (1985). *On the long-wavelength correlation between gravity and topography*. Paper presented at the Fifth International Symposium "Geodesy and Physics of the Earth". Magdeburg.
- Tsoulis, D., & Patlakis, K. (2013). A spectral assessment review of current satellite-only and combined Earth gravity models. *Reviews of Geophysics*, 51(2), 186-243. DOI:<https://doi.org/10.1002/rog.20012>
- USGS. (2025). United States Geological Survey. <https://earthexplorer.usgs.gov>
- Ustun, A., & Abbak, R. A. (2010). On global and regional spectral evaluation of global geopotential models. *Journal of Geophysics and Engineering*, 7(4), 369-379. DOI:<https://doi.org/10.1088/1742-2132/7/4/003>
- Vaniček, P., & Featherstone, W. E. (1998). Performance of three types of Stokes's kernel in the combined solution for the geoid. *Journal of Geodesy*, 72(12), 684-697. DOI:<https://doi.org/10.1007/s001900050209>
- Vaniček, P., & Kleusberg, A. (1987). The Canadian geoid – Stokesian approach. *Manuscripta geodaetica*, 12, 86-98. DOI:<https://doi.org/10.1007/BF03655117>
- Vaniček, P., & Martinec, Z. (1994). The Stokes-Helmert Scheme for the Evaluation of a Precise Geoid. *Manuscripta geodaetica*, 3(19), 119-128.
- Vaniček, P., & Sjöberg, L. E. (1991). Reformulation of Stokes's theory for higher than second-degree reference field and modification of integration kernels. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 96(B4), 6529-6539. DOI:<https://doi.org/10.1029/90JB02782>
- Varga, M. (2018). *The Application of Crustal Models in Regional Modelling of the Earth's Gravity Field*.
- Wackernagel, H. (1995). Cokriging. In H. Wackernagel (Ed.), *Multivariate Geostatistics: An Introduction with Applications* (pp. 144-151). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Wichiencharoen, C. (1982). *The indirect effects on the computation of geoid undulations*. Retrieved from Ohio, Columbus: <https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=19830016735>.
- Wong, L., & Gore, R. (1969). Accuracy of Geoid Heights from Modified Stokes Kernels. *Geophysical Journal International*, 18(1), 81-91. DOI:<https://doi.org/10.1111-j.1365-246X.1969.tb00264.x>
- Xu, X., Li, J., Zhao, Y., & Wei, H. (2023). A GOCE only gravity model GOSG02S based on the SGG and SST observations.
- Xu, X., Zhao, Y., Reubelt, T., & Tenzer, R. (2017). A GOCE only gravity model GOSG01S and the validation of GOCE related satellite gravity models. *Geodesy and Geodynamics*, 8(4), 260-272. DOI:<https://doi.org/10.1016/j.geog.2017.03.013>
- Yamazaki, D., Ikeshima, D., Tawatari, R., Yamaguchi, T., O'Loughlin, F., Neal, J. C., . . . Bates, P. D. (2017). A high-accuracy map of global terrain elevations. *Geophysical Research Letters*, 44(11), 5844-5853. DOI:<https://doi.org/10.1002/2017GL072874>
- Yilmaz, H. (2007). The Effect of Interpolation Methods in Surface Definition: an Experimental Study. *Earth Surface Processes and Landforms*, 32, 1346-1361. DOI:<https://doi.org/10.1002/esp.1473>
- Zhao, Y., Li, J., Xu, X., & Su, Y. (2023). WHU-SWPU-GOGR2022S: A combined gravity model of GOCE and GRACE.
- Zhou, H., Luo, Z., Zhou, Z., Zhong, B., & Hsu, H. (2017). HUST-Grace2016s: A new GRACE static gravity field model derived from a modified dynamic approach over a 13-year observation period. *Advances in Space Research*, 60(3), 597-611. DOI:<https://doi.org/10.1016/j.asr.2017.04.026>

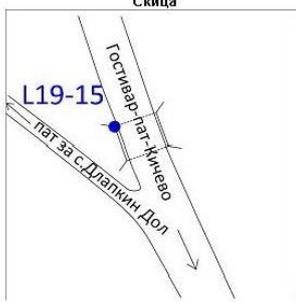
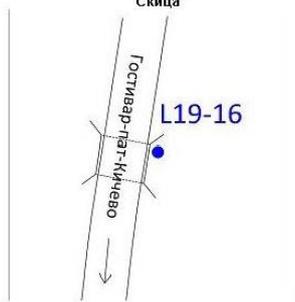
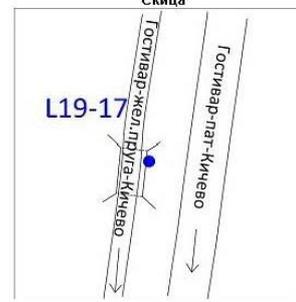
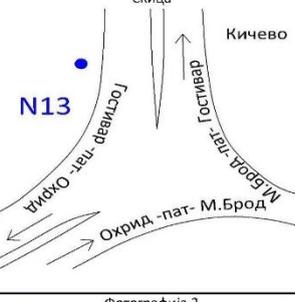
ПРИЛОЗИ

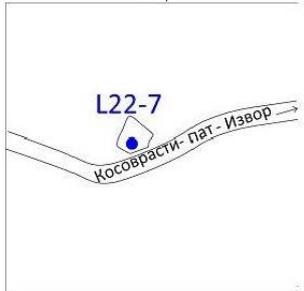
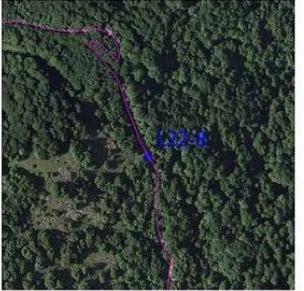
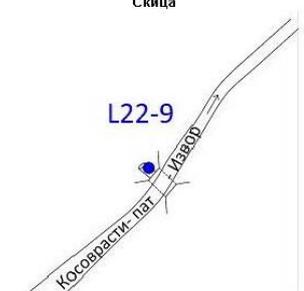
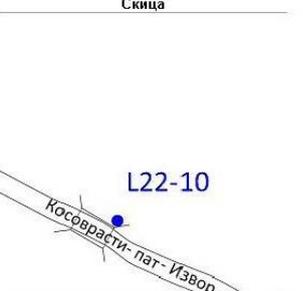
Во делот со прилози се прикажани теренските обрасци од кампањата за воспоставување на нова нивелманска основа (НВТ3) во Република Македонија, придружени со ГНСС и гравиметриски мерења.

<p>Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000</p> 		<p>Полигон: L25   Репер: FR5 Скица</p> 				
<p>Фотографија 1</p> 		<p>Фотографија 2</p> 				
ETRS89	B	41° 28' 39.33833"	L	20° 55' 07.83536"	h	678.9872
Тип на репер			<input checked="" type="checkbox"/>	Фундаментален репер		
			<input type="checkbox"/>	Јазолна точка		
			<input type="checkbox"/>	Точка од пасивна мрежа		
			<input type="checkbox"/>	Обичен вертикален репер		
			<input type="checkbox"/>	Обичен хоризонтален репер		
			<input type="checkbox"/>	Кратка цевка		
Забелешка: Фундаментален репер всаден во армирано бетонска шахта, вкопана во карпа						
Државен координатен систем					НВТ1	
	y	7493664.152	x	4592648.538	H	635.5535

<p>Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000</p> 		<p>Полигон: L18   Репер: L18-1 Скица</p> 		<p>Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000</p> 		<p>Полигон: L18   Репер: L18-2 Скица</p> 																																																	
<p>Фотографија 1</p> 		<p>Фотографија 2</p> 		<p>Фотографија 1</p> 		<p>Фотографија 2</p> 																																																	
<p>ETRS89   В   41° 29' 23.90211"   Л   20° 58' 03.04834"   h   652.2782</p>		<p>ETRS89   В   41° 28' 42.72379"   Л   20° 58' 58.45976"   h   645.1423</p>		<p>ETRS89   В   41° 28' 42.72379"   Л   20° 58' 58.45976"   h   645.1423</p>		<p>ETRS89   В   41° 28' 42.72379"   Л   20° 58' 58.45976"   h   645.1423</p>																																																	
<p>Тип на репер</p> <table border="1"> <tr><td><input type="checkbox"/></td><td>Фундаментален репер</td></tr> <tr><td><input type="checkbox"/></td><td>Јазолна точка</td></tr> <tr><td><input type="checkbox"/></td><td>Точка од пасивна мрежа</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>Обичен вертикален репер</td></tr> <tr><td><input type="checkbox"/></td><td>Обичен хоризонтален репер</td></tr> <tr><td><input type="checkbox"/></td><td>Кратка цевка</td></tr> </table>		<input type="checkbox"/>	Фундаментален репер	<input type="checkbox"/>	Јазолна точка	<input type="checkbox"/>	Точка од пасивна мрежа	<input checked="" type="checkbox"/>	Обичен вертикален репер	<input type="checkbox"/>	Обичен хоризонтален репер	<input type="checkbox"/>	Кратка цевка	<p>Тип на репер</p> <table border="1"> <tr><td><input type="checkbox"/></td><td>Фундаментален репер</td></tr> <tr><td><input type="checkbox"/></td><td>Јазолна точка</td></tr> <tr><td><input type="checkbox"/></td><td>Точка од пасивна мрежа</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>Обичен вертикален репер</td></tr> <tr><td><input type="checkbox"/></td><td>Обичен хоризонтален репер</td></tr> <tr><td><input type="checkbox"/></td><td>Кратка цевка</td></tr> </table>		<input type="checkbox"/>	Фундаментален репер	<input type="checkbox"/>	Јазолна точка	<input type="checkbox"/>	Точка од пасивна мрежа	<input checked="" type="checkbox"/>	Обичен вертикален репер	<input type="checkbox"/>	Обичен хоризонтален репер	<input type="checkbox"/>	Кратка цевка	<p>Тип на репер</p> <table border="1"> <tr><td><input type="checkbox"/></td><td>Фундаментален репер</td></tr> <tr><td><input type="checkbox"/></td><td>Јазолна точка</td></tr> <tr><td><input type="checkbox"/></td><td>Точка од пасивна мрежа</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>Обичен вертикален репер</td></tr> <tr><td><input type="checkbox"/></td><td>Обичен хоризонтален репер</td></tr> <tr><td><input type="checkbox"/></td><td>Кратка цевка</td></tr> </table>		<input type="checkbox"/>	Фундаментален репер	<input type="checkbox"/>	Јазолна точка	<input type="checkbox"/>	Точка од пасивна мрежа	<input checked="" type="checkbox"/>	Обичен вертикален репер	<input type="checkbox"/>	Обичен хоризонтален репер	<input type="checkbox"/>	Кратка цевка	<p>Тип на репер</p> <table border="1"> <tr><td><input type="checkbox"/></td><td>Фундаментален репер</td></tr> <tr><td><input type="checkbox"/></td><td>Јазолна точка</td></tr> <tr><td><input type="checkbox"/></td><td>Точка од пасивна мрежа</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>Обичен вертикален репер</td></tr> <tr><td><input type="checkbox"/></td><td>Обичен хоризонтален репер</td></tr> <tr><td><input type="checkbox"/></td><td>Кратка цевка</td></tr> </table>		<input type="checkbox"/>	Фундаментален репер	<input type="checkbox"/>	Јазолна точка	<input type="checkbox"/>	Точка од пасивна мрежа	<input checked="" type="checkbox"/>	Обичен вертикален репер	<input type="checkbox"/>	Обичен хоризонтален репер	<input type="checkbox"/>	Кратка цевка
<input type="checkbox"/>	Фундаментален репер																																																						
<input type="checkbox"/>	Јазолна точка																																																						
<input type="checkbox"/>	Точка од пасивна мрежа																																																						
<input checked="" type="checkbox"/>	Обичен вертикален репер																																																						
<input type="checkbox"/>	Обичен хоризонтален репер																																																						
<input type="checkbox"/>	Кратка цевка																																																						
<input type="checkbox"/>	Фундаментален репер																																																						
<input type="checkbox"/>	Јазолна точка																																																						
<input type="checkbox"/>	Точка од пасивна мрежа																																																						
<input checked="" type="checkbox"/>	Обичен вертикален репер																																																						
<input type="checkbox"/>	Обичен хоризонтален репер																																																						
<input type="checkbox"/>	Кратка цевка																																																						
<input type="checkbox"/>	Фундаментален репер																																																						
<input type="checkbox"/>	Јазолна точка																																																						
<input type="checkbox"/>	Точка од пасивна мрежа																																																						
<input checked="" type="checkbox"/>	Обичен вертикален репер																																																						
<input type="checkbox"/>	Обичен хоризонтален репер																																																						
<input type="checkbox"/>	Кратка цевка																																																						
<input type="checkbox"/>	Фундаментален репер																																																						
<input type="checkbox"/>	Јазолна точка																																																						
<input type="checkbox"/>	Точка од пасивна мрежа																																																						
<input checked="" type="checkbox"/>	Обичен вертикален репер																																																						
<input type="checkbox"/>	Обичен хоризонтален репер																																																						
<input type="checkbox"/>	Кратка цевка																																																						
<p>Забелешка: Армирани-бетонски пропуст</p>				<p>Забелешка: Армирани-бетонски пропуст</p>																																																			
<p>Државен координатен систем</p> <table border="1"> <tr><td>у</td><td>7497729.633</td><td>х</td><td>4594020.694</td><td>Н</td><td>608.7869</td></tr> </table>		у	7497729.633	х	4594020.694	Н	608.7869	<p>Државен координатен систем</p> <table border="1"> <tr><td>у</td><td>7499014.686</td><td>х</td><td>4592750.127</td><td>Н</td><td>601.6526</td></tr> </table>		у	7499014.686	х	4592750.127	Н	601.6526	<p>Државен координатен систем</p> <table border="1"> <tr><td>у</td><td>7499014.686</td><td>х</td><td>4592750.127</td><td>Н</td><td>601.6526</td></tr> </table>		у	7499014.686	х	4592750.127	Н	601.6526	<p>Државен координатен систем</p> <table border="1"> <tr><td>у</td><td>7499014.686</td><td>х</td><td>4592750.127</td><td>Н</td><td>601.6526</td></tr> </table>		у	7499014.686	х	4592750.127	Н	601.6526																								
у	7497729.633	х	4594020.694	Н	608.7869																																																		
у	7499014.686	х	4592750.127	Н	601.6526																																																		
у	7499014.686	х	4592750.127	Н	601.6526																																																		
у	7499014.686	х	4592750.127	Н	601.6526																																																		
<p>Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000</p> 		<p>Полигон: L19   Репер: L19-9 Скица</p> 		<p>Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000</p> 		<p>Полигон: L19   Репер: L19-10 Скица</p> 																																																	
<p>Фотографија 1</p> 		<p>Фотографија 2</p> 		<p>Фотографија 1</p> 		<p>Фотографија 2</p> 																																																	
<p>ETRS89   В   41° 38' 31.25313"   Л   20° 53' 22.96659"   h   897.9823</p>		<p>ETRS89   В   41° 38' 07.20602"   Л   20° 54' 31.00084"   h   850.4785</p>		<p>ETRS89   В   41° 38' 07.20602"   Л   20° 54' 31.00084"   h   850.4785</p>		<p>ETRS89   В   41° 38' 07.20602"   Л   20° 54' 31.00084"   h   850.4785</p>																																																	
<p>Тип на репер</p> <table border="1"> <tr><td><input type="checkbox"/></td><td>Фундаментален репер</td></tr> <tr><td><input type="checkbox"/></td><td>Јазолна точка</td></tr> <tr><td><input type="checkbox"/></td><td>Точка од пасивна мрежа</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>Обичен вертикален репер</td></tr> <tr><td><input type="checkbox"/></td><td>Обичен хоризонтален репер</td></tr> <tr><td><input type="checkbox"/></td><td>Кратка цевка</td></tr> </table>		<input type="checkbox"/>	Фундаментален репер	<input type="checkbox"/>	Јазолна точка	<input type="checkbox"/>	Точка од пасивна мрежа	<input checked="" type="checkbox"/>	Обичен вертикален репер	<input type="checkbox"/>	Обичен хоризонтален репер	<input type="checkbox"/>	Кратка цевка	<p>Тип на репер</p> <table border="1"> <tr><td><input type="checkbox"/></td><td>Фундаментален репер</td></tr> <tr><td><input type="checkbox"/></td><td>Јазолна точка</td></tr> <tr><td><input type="checkbox"/></td><td>Точка од пасивна мрежа</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>Обичен вертикален репер</td></tr> <tr><td><input type="checkbox"/></td><td>Обичен хоризонтален репер</td></tr> <tr><td><input type="checkbox"/></td><td>Кратка цевка</td></tr> </table>		<input type="checkbox"/>	Фундаментален репер	<input type="checkbox"/>	Јазолна точка	<input type="checkbox"/>	Точка од пасивна мрежа	<input checked="" type="checkbox"/>	Обичен вертикален репер	<input type="checkbox"/>	Обичен хоризонтален репер	<input type="checkbox"/>	Кратка цевка	<p>Тип на репер</p> <table border="1"> <tr><td><input type="checkbox"/></td><td>Фундаментален репер</td></tr> <tr><td><input type="checkbox"/></td><td>Јазолна точка</td></tr> <tr><td><input type="checkbox"/></td><td>Точка од пасивна мрежа</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>Обичен вертикален репер</td></tr> <tr><td><input type="checkbox"/></td><td>Обичен хоризонтален репер</td></tr> <tr><td><input type="checkbox"/></td><td>Кратка цевка</td></tr> </table>		<input type="checkbox"/>	Фундаментален репер	<input type="checkbox"/>	Јазолна точка	<input type="checkbox"/>	Точка од пасивна мрежа	<input checked="" type="checkbox"/>	Обичен вертикален репер	<input type="checkbox"/>	Обичен хоризонтален репер	<input type="checkbox"/>	Кратка цевка	<p>Тип на репер</p> <table border="1"> <tr><td><input type="checkbox"/></td><td>Фундаментален репер</td></tr> <tr><td><input type="checkbox"/></td><td>Јазолна точка</td></tr> <tr><td><input type="checkbox"/></td><td>Точка од пасивна мрежа</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>Обичен вертикален репер</td></tr> <tr><td><input type="checkbox"/></td><td>Обичен хоризонтален репер</td></tr> <tr><td><input type="checkbox"/></td><td>Кратка цевка</td></tr> </table>		<input type="checkbox"/>	Фундаментален репер	<input type="checkbox"/>	Јазолна точка	<input type="checkbox"/>	Точка од пасивна мрежа	<input checked="" type="checkbox"/>	Обичен вертикален репер	<input type="checkbox"/>	Обичен хоризонтален репер	<input type="checkbox"/>	Кратка цевка
<input type="checkbox"/>	Фундаментален репер																																																						
<input type="checkbox"/>	Јазолна точка																																																						
<input type="checkbox"/>	Точка од пасивна мрежа																																																						
<input checked="" type="checkbox"/>	Обичен вертикален репер																																																						
<input type="checkbox"/>	Обичен хоризонтален репер																																																						
<input type="checkbox"/>	Кратка цевка																																																						
<input type="checkbox"/>	Фундаментален репер																																																						
<input type="checkbox"/>	Јазолна точка																																																						
<input type="checkbox"/>	Точка од пасивна мрежа																																																						
<input checked="" type="checkbox"/>	Обичен вертикален репер																																																						
<input type="checkbox"/>	Обичен хоризонтален репер																																																						
<input type="checkbox"/>	Кратка цевка																																																						
<input type="checkbox"/>	Фундаментален репер																																																						
<input type="checkbox"/>	Јазолна точка																																																						
<input type="checkbox"/>	Точка од пасивна мрежа																																																						
<input checked="" type="checkbox"/>	Обичен вертикален репер																																																						
<input type="checkbox"/>	Обичен хоризонтален репер																																																						
<input type="checkbox"/>	Кратка цевка																																																						
<input type="checkbox"/>	Фундаментален репер																																																						
<input type="checkbox"/>	Јазолна точка																																																						
<input type="checkbox"/>	Точка од пасивна мрежа																																																						
<input checked="" type="checkbox"/>	Обичен вертикален репер																																																						
<input type="checkbox"/>	Обичен хоризонтален репер																																																						
<input type="checkbox"/>	Кратка цевка																																																						
<p>Забелешка: Армирано-бетонски сид</p>				<p>Забелешка: Армирано-бетонски пропуст</p>																																																			
<p>Државен координатен систем</p> <table border="1"> <tr><td>у</td><td>7491253.818</td><td>х</td><td>4610910.930</td><td>Н</td><td>853.8874</td></tr> </table>		у	7491253.818	х	4610910.930	Н	853.8874	<p>Државен координатен систем</p> <table border="1"> <tr><td>у</td><td>7492827.539</td><td>х</td><td>4610167.377</td><td>Н</td><td>806.3811</td></tr> </table>		у	7492827.539	х	4610167.377	Н	806.3811	<p>Државен координатен систем</p> <table border="1"> <tr><td>у</td><td>7492827.539</td><td>х</td><td>4610167.377</td><td>Н</td><td>806.3811</td></tr> </table>		у	7492827.539	х	4610167.377	Н	806.3811	<p>Државен координатен систем</p> <table border="1"> <tr><td>у</td><td>7492827.539</td><td>х</td><td>4610167.377</td><td>Н</td><td>806.3811</td></tr> </table>		у	7492827.539	х	4610167.377	Н	806.3811																								
у	7491253.818	х	4610910.930	Н	853.8874																																																		
у	7492827.539	х	4610167.377	Н	806.3811																																																		
у	7492827.539	х	4610167.377	Н	806.3811																																																		
у	7492827.539	х	4610167.377	Н	806.3811																																																		

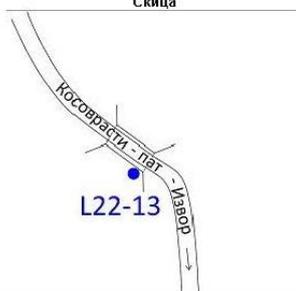
<p>Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000</p> 		<p>Полигон: L19   Рефер: L19-11 Скица</p> 		<p>Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000</p> 		<p>Полигон: L19   Рефер: L19-12 Скица</p> 	
<p>Фотографија 1</p> 		<p>Фотографија 2</p> 		<p>Фотографија 1</p> 		<p>Фотографија 2</p> 	
<p>ETRS89   В   41° 37' 37.20796"   L   20° 55' 22.11451"   h   815,7468</p>		<p>ETRS89   В   41° 36' 53.76867"   L   20° 56' 25.26066"   h   784,3980</p>					
<p>Тип на репер</p>		<p>Тип на репер</p>					
<p>Фундаментален репер</p>		<p>Фундаментален репер</p>					
<p>Јазолна точка</p>		<p>Јазолна точка</p>					
<p>Точка од пасивна мрежа</p>		<p>Точка од пасивна мрежа</p>					
<p>✓ Обичен вертикален репер</p>		<p>✓ Обичен вертикален репер</p>					
<p>Обичен хоризонтален репер</p>		<p>Обичен хоризонтален репер</p>					
<p>Кратка цевка</p>		<p>Кратка цевка</p>					
<p>Забелешка: Армирано-бетонски мост</p>				<p>Забелешка: Армирано-бетонски пропуст</p>			
<p>Државен координатен систем</p>				<p>Државен координатен систем</p>			
<p>у   7494009.740   x   4609240.823   Н   771.7360</p>				<p>у   7495470.494   x   4607899.671   Н   740.4344</p>			
<p>Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000</p> 		<p>Полигон: L19   Рефер: L19-13 Скица</p> 		<p>Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000</p> 		<p>Полигон: L19   Рефер: L19-14 Скица</p> 	
<p>Фотографија 1</p> 		<p>Фотографија 2</p> 		<p>Фотографија 1</p> 		<p>Фотографија 2</p> 	
<p>ETRS89   В   41° 35' 45.29472"   L   20° 57' 05.48128"   h   757,9737</p>		<p>ETRS89   В   41° 34' 58.35867"   L   20° 57' 03.01117"   h   739,9293</p>					
<p>Тип на репер</p>		<p>Тип на репер</p>					
<p>Фундаментален репер</p>		<p>Фундаментален репер</p>					
<p>Јазолна точка</p>		<p>Јазолна точка</p>					
<p>Точка од пасивна мрежа</p>		<p>Точка од пасивна мрежа</p>					
<p>✓ Обичен вертикален репер</p>		<p>✓ Обичен вертикален репер</p>					
<p>Обичен хоризонтален репер</p>		<p>Обичен хоризонтален репер</p>					
<p>Кратка цевка</p>		<p>Кратка цевка</p>					
<p>Забелешка: Армирано-бетонски ѕид</p>				<p>Забелешка: Армирано-бетонски пропуст</p>			
<p>Државен координатен систем</p>				<p>Државен координатен систем</p>			
<p>у   7496400.567   x   4605786.792   Н   714.0896</p>				<p>у   7496342.558   x   4604338.879   Н   696.0916</p>			

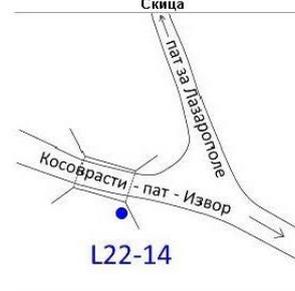
<p>Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000</p> 		<p>Полигон: L19   Репер: L19-15 Скица</p> 		<p>Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000</p> 		<p>Полигон: L19   Репер: L19-16 Скица</p> 	
<p>Фотографија 1</p> 		<p>Фотографија 2</p> 		<p>Фотографија 1</p> 		<p>Фотографија 2</p> 	
<p>ETRS89   В   41° 34' 01.47926"   Л   20° 57' 28.82905"   h   708,5822</p>		<p>ETRS89   В   41° 33' 02.95744"   Л   20° 57' 46.47050"   h   684,1057</p>					
<p>Тип на репер</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Фундаментален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Јазолна точка</li> <li><input type="checkbox"/> Точка од пасивна мрежа</li> <li><input checked="" type="checkbox"/> Обичен вертикален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Обичен хоризонтален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Кратка цевка</li> </ul>		<p>Тип на репер</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Фундаментален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Јазолна точка</li> <li><input type="checkbox"/> Точка од пасивна мрежа</li> <li><input checked="" type="checkbox"/> Обичен вертикален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Обичен хоризонтален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Кратка цевка</li> </ul>					
<p>Забелешка: Армирано-бетонски пропуст</p>		<p>Забелешка: Армирано-бетонски пропуст</p>					
<p>Државен координатен систем</p> <p>у   7496939.744   х   4602583.906   Н   664.8156</p>		<p>Државен координатен систем</p> <p>у   7497347.715   х   4600778.395   Н   640.4159</p>					
<p>Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000</p> 		<p>Полигон: L19   Репер: L19-17 Скица</p> 		<p>Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000</p> 		<p>Линија: L19   Репер: N13 Скица</p> 	
<p>Фотографија 1</p> 		<p>Фотографија 2</p> 		<p>Фотографија 1</p> 		<p>Фотографија 2</p> 	
<p>ETRS89   В   41° 31' 55.42996"   Л   20° 57' 28.35674"   h   684,5131</p>		<p>ETRS89   В   41° 30' 04.48495"   Л   20° 57' 08.41888"   h   669,0994</p>					
<p>Тип на репер</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Фундаментален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Јазолна точка</li> <li><input type="checkbox"/> Точка од пасивна мрежа</li> <li><input checked="" type="checkbox"/> Обичен вертикален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Обичен хоризонтален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Кратка цевка</li> </ul>		<p>Тип на репер</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><input checked="" type="checkbox"/> Фундаментален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Јазолна точка</li> <li><input type="checkbox"/> Точка од пасивна мрежа</li> <li><input type="checkbox"/> Обичен вертикален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Обичен хоризонтален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Кратка цевка</li> </ul>					
<p>Забелешка: Армирано-бетонски пропуст</p>		<p>Забелешка: Армирано-бетонирана цевка уколана во земја</p>					
<p>Државен координатен систем</p> <p>у   7496926.911   х   4598695.438   Н   640.8952</p>		<p>Државен координатен систем</p> <p>у   7496463.107   х   4595273.160   Н   625.5691</p>					

<p>Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000</p> 		<p>Полигон: L22   Рефер: L22-7 Скица</p> 		<p>Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000</p> 		<p>Полигон: L22   Рефер: L22-8 Скица</p> 									
<p>Фотографија 1</p> 		<p>Фотографија 2</p> 		<p>Фотографија 1</p> 		<p>Фотографија 2</p> 									
<p>ETRS89   В   41° 29' 03.12499"   Л   20° 45' 53.03934"   h   1506,7188</p>		<p>ETRS89   В   41° 29' 26.62798"   Л   20° 45' 14.92224"   h   1504,9811</p>													
<p>Тип на репер</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Фундаментален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Јазолна точка</li> <li><input type="checkbox"/> Точка од пасивна мрежа</li> <li><input type="checkbox"/> Обичен вертикален репер</li> <li><input checked="" type="checkbox"/> Обичен хоризонтален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Кратка цевка</li> </ul>		<p>Тип на репер</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Фундаментален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Јазолна точка</li> <li><input type="checkbox"/> Точка од пасивна мрежа</li> <li><input type="checkbox"/> Обичен вертикален репер</li> <li><input checked="" type="checkbox"/> Обичен хоризонтален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Кратка цевка</li> </ul>													
<p>Забелешка: Карпа</p>		<p>Забелешка: Карпа</p>													
<p>Државен координатен систем</p> <table border="1"> <tr> <td>у</td> <td>7480795.200</td> <td>х</td> <td>4593405.312</td> <td>Н</td> <td>1463.3279</td> </tr> </table>		у	7480795.200	х	4593405.312	Н	1463.3279	<p>Државен координатен систем</p> <table border="1"> <tr> <td>у</td> <td>7479913.010</td> <td>х</td> <td>4594132.718</td> <td>Н</td> <td>1461.7723</td> </tr> </table>		у	7479913.010	х	4594132.718	Н	1461.7723
у	7480795.200	х	4593405.312	Н	1463.3279										
у	7479913.010	х	4594132.718	Н	1461.7723										
<p>Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000</p> 		<p>Полигон: L22   Рефер: L22-9 Скица</p> 		<p>Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000</p> 		<p>Полигон: L22   Рефер: L22-10 Скица</p> 									
<p>Фотографија 1</p> 		<p>Фотографија 2</p> 		<p>Фотографија 1</p> 		<p>Фотографија 2</p> 									
<p>ETRS89   В   41° 29' 28.01470"   Л   20° 44' 26.59897"   h   1534,2262</p>		<p>ETRS89   В   41° 29' 52.41757"   Л   20° 43' 21.35634"   h   1410,7492</p>													
<p>Тип на репер</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Фундаментален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Јазолна точка</li> <li><input type="checkbox"/> Точка од пасивна мрежа</li> <li><input checked="" type="checkbox"/> Обичен вертикален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Обичен хоризонтален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Кратка цевка</li> </ul>		<p>Тип на репер</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Фундаментален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Јазолна точка</li> <li><input type="checkbox"/> Точка од пасивна мрежа</li> <li><input checked="" type="checkbox"/> Обичен вертикален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Обичен хоризонтален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Кратка цевка</li> </ul>													
<p>Забелешка: Армирано-бетонски пропуст-цевка</p>		<p>Забелешка: Мост</p>													
<p>Државен координатен систем</p> <table border="1"> <tr> <td>у</td> <td>7478792.331</td> <td>х</td> <td>4594178.761</td> <td>Н</td> <td>1490.8811</td> </tr> </table>		у	7478792.331	х	4594178.761	Н	1490.8811	<p>Државен координатен систем</p> <table border="1"> <tr> <td>у</td> <td>7477281.497</td> <td>х</td> <td>4594936.131</td> <td>Н</td> <td>1367.3902</td> </tr> </table>		у	7477281.497	х	4594936.131	Н	1367.3902
у	7478792.331	х	4594178.761	Н	1490.8811										
у	7477281.497	х	4594936.131	Н	1367.3902										

Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000		Полигон: L22		Репер: L22-11 Скица	
					
Фотографија 1		Фотографија 2			
					
ETRS89		В	41° 30' 13.37076"	Л	20° 42' 22.16284" h
					1326,7316
Тип на репер		Фундаментален репер			
		Јазолна точка			
		Точка од пасивна мрежа			
		Обичен вертикален репер			
		✓ Обичен хоризонтален репер			
				Кратка цевка	
Забелешка: Карпа					
Државен координатен систем				НВТ1	
у	7475910.912	х	4595586.882	Н	1283.2539

Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000		Полигон: L22		Репер: L22-12 Скица	
					
Фотографија 1		Фотографија 2			
					
ETRS89		В	41° 30' 16.63878"	Л	20° 41' 55.02812" h
					1206,4107
Тип на репер		Фундаментален репер			
		Јазолна точка			
		Точка од пасивна мрежа			
		Обичен вертикален репер			
		✓ Обичен хоризонтален репер			
				Кратка цевка	
Забелешка: Карпа					
Државен координатен систем				НВТ1	
у	7475282.015	х	4595689.872	Н	1163.0552

Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000		Полигон: L22		Репер: L22-13 Скица	
					
Фотографија 1		Фотографија 2			
					
ETRS89		В	41° 30' 27.52015"	Л	20° 41' 48.01996" h
					1070,2847
Тип на репер		Фундаментален репер			
		Јазолна точка			
		Точка од пасивна мрежа			
		✓ Обичен вертикален репер			
		Обичен хоризонтален репер			
				Кратка цевка	
Забелешка: Мост					
Државен координатен систем				НВТ1	
у	7475120.648	х	4596026.143	Н	1026.9646

Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000		Полигон: L22		Репер: L22-14 Скица	
					
Фотографија 1		Фотографија 2			
					
ETRS89		В	41° 30' 55.62424"	Л	20° 41' 05.42608" h
					969,6807
Тип на репер		Фундаментален репер			
		Јазолна точка			
		Точка од пасивна мрежа			
		✓ Обичен вертикален репер			
		Обичен хоризонтален репер			
				Кратка цевка	
Забелешка: Мост					
Државен координатен систем				НВТ1	
у	7474136.049	х	4596902.911	Н	926.4720

Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000		Полигон: L22 Рефер: L22-15 Скица				
Фотографија 1		Фотографија 2				
ETRS89	В	41° 31' 24.52401"	Л	20° 40' 08.87288"	h	926,1491
Тип на репер	<input type="checkbox"/> Фундаментален репер					
	<input type="checkbox"/> Јазолна точка					
	<input type="checkbox"/> Точка од пасивна мрежа					
	<input checked="" type="checkbox"/> Обичен вертикален репер					
	<input type="checkbox"/> Обичен хоризонтален репер					
<input type="checkbox"/> Кратка цевка						
Забелешка: Ари ирано-бетонска шахта						
Државен координатен систем					НВТ1	
y	7472828.120	x	4597793.215	Н	882.8850	

Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000		Полигон: L23 Рефер: N15 Скица				
Фотографија 1		Фотографија 2				
ETRS89	В	41° 28' 55.86215"	Л	20° 49' 25.93606"	h	788.7026
Тип на репер	<input type="checkbox"/> Фундаментален репер					
	<input checked="" type="checkbox"/> Јазолна точка					
	<input type="checkbox"/> Точка од пасивна мрежа					
	<input type="checkbox"/> Обичен вертикален репер					
	<input type="checkbox"/> Обичен хоризонтален репер					
<input type="checkbox"/> Кратка цевка						
Забелешка: Армирано бетонска цевка укупана во земја						
Државен координатен систем					НВТ1	
y	7485733.141	x	4593169.411	Н	745.3176	

Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000		Полигон: L23 Рефер: L23-1 Скица				
Фотографија 1		Фотографија 2				
ETRS89	В	41° 28' 07.31753"	Л	20° 48' 50.00730"	h	819.8732
Тип на репер	<input type="checkbox"/> Фундаментален репер					
	<input type="checkbox"/> Јазолна точка					
	<input type="checkbox"/> Точка од пасивна мрежа					
	<input checked="" type="checkbox"/> Обичен вертикален репер					
	<input type="checkbox"/> Обичен хоризонтален репер					
<input type="checkbox"/> Кратка цевка						
Забелешка: Армирано - бетонски пропуст						
Државен координатен систем					НВТ1	
y	7484896.363	x	4591673.28	Н	776.4757	

Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000		Полигон: L23 Рефер: L23-2 Скица				
Фотографија 1		Фотографија 2				
ETRS89	В	41° 27' 23.76691"	Л	20° 49' 14.27418"	h	917.9856
Тип на репер	<input type="checkbox"/> Фундаментален репер					
	<input type="checkbox"/> Јазолна точка					
	<input type="checkbox"/> Точка од пасивна мрежа					
	<input checked="" type="checkbox"/> Обичен вертикален репер					
	<input type="checkbox"/> Обичен хоризонтален репер					
<input type="checkbox"/> Кратка цевка						
Забелешка: Мост						
Државен координатен систем					НВТ1	
y	7485456.937	x	4590329.123	Н	874.6709	

Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000		Полигон: L23   Репер: L23-3 Скица	
Фотографија 1		Фотографија 2	
ETRS89	В	41° 26' 51.87998"	Л 20° 49' 36.00196"   Н 1015.8965
Тип на репер	Фундаментален репер		
	Јазолна точка		
	Точка од пасивна мрежа		
	<input checked="" type="checkbox"/> Обичен вертикален репер		
	Обичен хоризонтален репер		
Забелешка: Армирано - бетонска шахта			
Државен координатен систем		НВТ1	
у	7485959.302	х	4589344.597   Н 972.5921

Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000		Полигон: L23   Репер: L23-4 Скица	
Фотографија 1		Фотографија 2	
ETRS89	В	41° 25' 54.79973"	Л 20° 49' 20.50967"   Н 1116.725
Тип на репер	Фундаментален репер		
	Јазолна точка		
	Точка од пасивна мрежа		
	<input checked="" type="checkbox"/> Обичен вертикален репер		
	Обичен хоризонтален репер		
Забелешка: Армирано - бетонска шахта			
Државен координатен систем		НВТ1	
у	7485596.162	х	4587584.564   Н 1073.4678

Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000		Полигон: L23   Репер: L23-5 Скица	
Фотографија 1		Фотографија 2	
ETRS89	В	41° 25' 30.22778"	Л 20° 49' 07.31595"   Н 1021.72
Тип на репер	Фундаментален репер		
	Јазолна точка		
	Точка од пасивна мрежа		
	<input checked="" type="checkbox"/> Обичен вертикален репер		
	Обичен хоризонтален репер		
Забелешка: Армирано - бетонски споменикод НОБ			
Државен координатен систем		НВТ1	
у	7485288.296	х	4586827.211   Н 978.4829

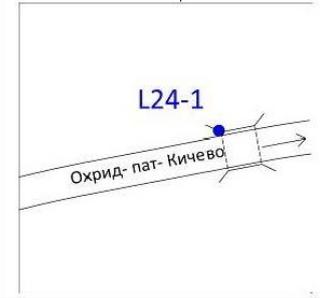
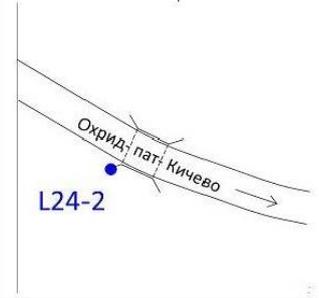
Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000		Полигон: L23   Репер: L23-6 Скица	
Фотографија 1		Фотографија 2	
ETRS89	В	41° 24' 35.57327"	Л 20° 49' 02.12300"   Н 930.4161
Тип на репер	Фундаментален репер		
	Јазолна точка		
	Точка од пасивна мрежа		
	<input checked="" type="checkbox"/> Обичен вертикален репер		
	Обичен хоризонтален репер		
Забелешка: Армирано - бетонски протуст			
Државен координатен систем		НВТ1	
у	7485164.143	х	4585141.510   Н 887.3358

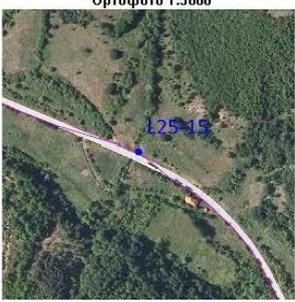
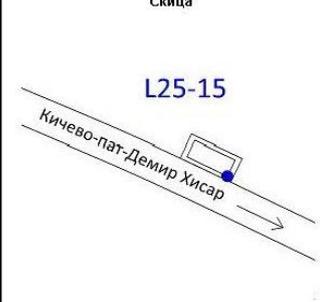
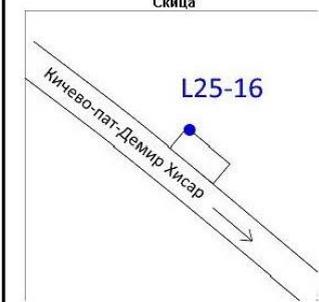
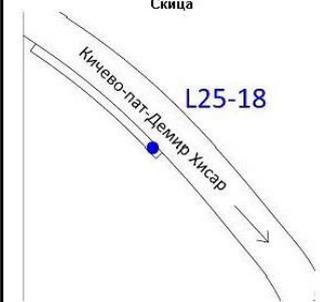
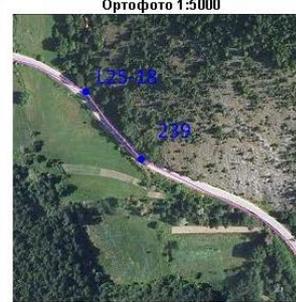
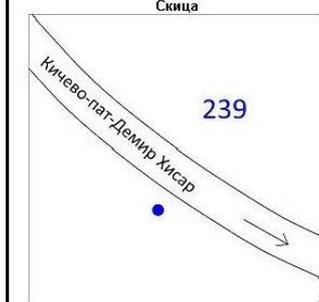
Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000		Полигон: L23		Репер: 125 Скица	
Фотографија 1		Фотографија 2			
ETRS89		В	41° 23' 41.22466"	Л	20° 49' 28.63915" h 911.0776
Тип на репер		Фундаментален репер			
		Јазолна точка			
		✓ Точка од пасивна мрежа			
		Обичен вертикален репер			
		Обичен хоризонтален репер			
Забелешка: Превземени податоци од АКН					
Државен координатен систем				НВТ1	
у	7485776.81	х	4583463.95	Н	868.0439

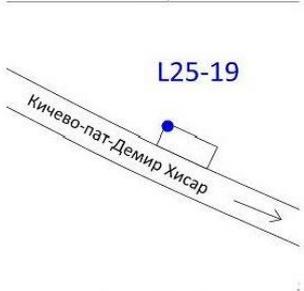
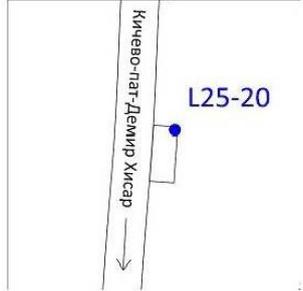
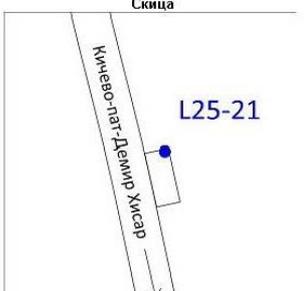
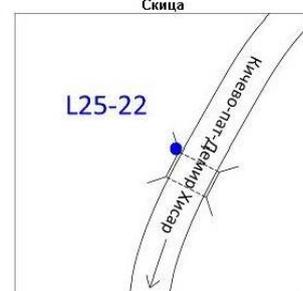
Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000		Полигон: L23		Репер: L23-7 Скица	
Фотографија 1		Фотографија 2			
ETRS89		В	41° 23' 38.24180"	Л	20° 49' 28.65840" h 906.6148
Тип на репер		Фундаментален репер			
		Јазолна точка			
		Точка од пасивна мрежа			
		✓ Обичен вертикален репер			
		Обичен хоризонтален репер			
Забелешка: Армирано - бетонски пропуст					
Државен координатен систем				НВТ1	
у	7485776.638	х	4583371.902	Н	863.5909

Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000		Полигон: L23		Репер: L23-8 Скица	
Фотографија 1		Фотографија 2			
ETRS89		В	41° 22' 41.49651"	Л	20° 49' 07.40749" h 886.346
Тип на репер		Фундаментален репер			
		Јазолна точка			
		Точка од пасивна мрежа			
		✓ Обичен вертикален репер			
		Обичен хоризонтален репер			
Забелешка: Објект					
Државен координатен систем				НВТ1	
у	7485279.455	х	4581622.416	Н	843.3721

Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000		Полигон: L24125		Репер: N14 Скица	
Фотографија 1		Фотографија 2			
ETRS89		В	41° 28' 45.31716"	Л	20° 55' 06.62225" h 681.4819
Тип на репер		Фундаментален репер			
		✓ Јазолна точка			
		Точка од пасивна мрежа			
		Обичен вертикален репер			
		Обичен хоризонтален репер			
Забелешка: Армирано бетонизирана цевка укупана во земја					
Државен координатен систем				НВТ1	
у	7493636.185	х	4592832.998	Н	638.0497

<p>Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000</p> 		<p>Полигон: L24   Репер: L24-1 Скица</p> 		<p>Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000</p> 		<p>Полигон: L24   Репер: L24-2 Скица</p> 									
<p>Фотографија 1</p> 		<p>Фотографија 2</p> 		<p>Фотографија 1</p> 		<p>Фотографија 2</p> 									
<p>ETRS89   В   41° 28' 53.94426"   Л   20° 53' 45.52430"   h   699,7937</p>		<p>ETRS89   В   41° 28' 36.70602"   Л   20° 52' 18.58079"   h   722,4345</p>													
<p>Тип на репер</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Фундаментален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Јазолна точка</li> <li><input type="checkbox"/> Точка од пасивна мрежа</li> <li><input checked="" type="checkbox"/> Обичен вертикален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Обичен хоризонтален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Кратка цевка</li> </ul>		<p>Тип на репер</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Фундаментален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Јазолна точка</li> <li><input type="checkbox"/> Точка од пасивна мрежа</li> <li><input checked="" type="checkbox"/> Обичен вертикален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Обичен хоризонтален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Кратка цевка</li> </ul>													
<p>Забелешка: Мост</p>		<p>Забелешка: Ари ирано-бетонски пропуст</p>													
<p>Државен координатен систем</p> <table border="1"> <tr> <td>у</td> <td>7491755.125</td> <td>х</td> <td>4593101.060</td> <td>Н</td> <td>656.3781</td> </tr> </table>		у	7491755.125	х	4593101.060	Н	656.3781	<p>Државен координатен систем</p> <table border="1"> <tr> <td>у</td> <td>7489737.406</td> <td>х</td> <td>4592571.901</td> <td>Н</td> <td>679.0523</td> </tr> </table>		у	7489737.406	х	4592571.901	Н	679.0523
у	7491755.125	х	4593101.060	Н	656.3781										
у	7489737.406	х	4592571.901	Н	679.0523										
<p>Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000</p> 		<p>Полигон: L24   Репер: L24-3 Скица</p> 		<p>Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000</p> 		<p>Полигон: L24   Репер: 240 Скица</p> 									
<p>Фотографија 1</p> 		<p>Фотографија 2</p> 		<p>Фотографија 1</p> 		<p>Фотографија 2</p> 									
<p>ETRS89   В   41° 28' 42.18264"   Л   20° 51' 06.31330"   h   744,9718</p>		<p>ETRS89   В   41° 28' 49.06227"   Л   20° 50' 04.18045"   h   776,6738</p>													
<p>Тип на репер</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Фундаментален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Јазолна точка</li> <li><input type="checkbox"/> Точка од пасивна мрежа</li> <li><input checked="" type="checkbox"/> Обичен вертикален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Обичен хоризонтален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Кратка цевка</li> </ul>		<p>Тип на репер</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Фундаментален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Јазолна точка</li> <li><input checked="" type="checkbox"/> Точка од пасивна мрежа</li> <li><input type="checkbox"/> Обичен вертикален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Обичен хоризонтален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Кратка цевка</li> </ul>													
<p>Забелешка: Ари ирано-бетонски пропуст</p>		<p>Забелешка: Превземен податоци од АКН</p>													
<p>Државен координатен систем</p> <table border="1"> <tr> <td>у</td> <td>7488061.083</td> <td>х</td> <td>4592743.404</td> <td>Н</td> <td>701.5871</td> </tr> </table>		у	7488061.083	х	4592743.404	Н	701.5871	<p>Државен координатен систем</p> <table border="1"> <tr> <td>у</td> <td>7486620.24</td> <td>х</td> <td>4592982.93</td> <td>Н</td> <td>733.2448</td> </tr> </table>		у	7486620.24	х	4592982.93	Н	733.2448
у	7488061.083	х	4592743.404	Н	701.5871										
у	7486620.24	х	4592982.93	Н	733.2448										

<p>Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000</p> 		<p>Полигон: L25   Рефер: L25-15 Скица</p> 		<p>Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000</p> 		<p>Полигон: L25   Рефер: L25-16 Скица</p> 	
<p>Фотографија 1</p> 		<p>Фотографија 2</p> 		<p>Фотографија 1</p> 		<p>Фотографија 2</p> 	
<p>ETRS89   В   41° 23' 41.86376"   L   20° 58' 17.48152"   h   810.2288</p>		<p>ETRS89   В   41° 24' 01.06283"   L   20° 57' 21.24663"   h   792.6662</p>					
<p>Тип на репер</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Фундаментален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Јазолна точка</li> <li><input type="checkbox"/> Точка од пасивна мрежа</li> <li><input checked="" type="checkbox"/> Обичен вертикален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Обичен хоризонтален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Кратка цевка</li> </ul>		<p>Тип на репер</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Фундаментален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Јазолна точка</li> <li><input type="checkbox"/> Точка од пасивна мрежа</li> <li><input checked="" type="checkbox"/> Обичен вертикален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Обичен хоризонтален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Кратка цевка</li> </ul>					
<p>Забелешка: Армирано-бетонска собирна шахта за вода</p>		<p>Забелешка: Армирано-бетонска собирна шахта за вода</p>					
<p>Државен координатен систем   НВТ1</p> <p>y   7498061.270   x   4583469.564   Н   766.7186</p>		<p>Државен координатен систем   НВТ1</p> <p>y   7496755.339   x   4584062.359   Н   749.3601</p>					
<p>Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000</p> 		<p>Полигон: L25   Рефер: L25-18 Скица</p> 		<p>Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000</p> 		<p>Полигон: L25   Рефер: 239 Скица</p> 	
<p>Фотографија 1</p> 		<p>Фотографија 2</p> 		<p>Фотографија 1</p> 		<p>Фотографија 2</p> 	
<p>ETRS89   В   41° 25' 34.75008"   L   20° 56' 54.48771"   h   750.6048</p>		<p>ETRS89   В   41° 25' 37.62935"   L   20° 56' 47.08219"   h   751.3497</p>					
<p>Тип на репер</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Фундаментален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Јазолна точка</li> <li><input type="checkbox"/> Точка од пасивна мрежа</li> <li><input checked="" type="checkbox"/> Обичен вертикален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Обичен хоризонтален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Кратка цевка</li> </ul>		<p>Тип на репер</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Фундаментален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Јазолна точка</li> <li><input checked="" type="checkbox"/> Точка од пасивна мрежа</li> <li><input type="checkbox"/> Обичен вертикален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Обичен хоризонтален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Кратка цевка</li> </ul>					
<p>Забелешка: Армирано-бетонски потпорен ѕид на патот</p>		<p>Забелешка: Точка од пасивната мрежа-превземени податоци од АКН</p>					
<p>Државен координатен систем   НВТ1</p> <p>y   7496135.374   x   4586952.630   Н   707.2872</p>		<p>Државен координатен систем   НВТ1</p> <p>y   7495963.478   x   4587041.530   Н   707.965</p>					

<p>Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000</p> 		<p>Полигон: L25   Репер: L25-19 Скица</p> 		<p>Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000</p> 		<p>Полигон: L25   Репер: L25-20 Скица</p> 									
<p>Фотографија 1</p> 		<p>Фотографија 2</p> 		<p>Фотографија 1</p> 		<p>Фотографија 2</p> 									
<p>ETRS89   В   41° 25' 30.51085"   Л   20° 55' 48.45666"   h   731.0988</p>		<p>ETRS89   В   41° 26' 22.57737"   Л   20° 55' 13.49232"   h   716.7995</p>													
<p>Тип на репер</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Фундаментален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Јазолна точка</li> <li><input type="checkbox"/> Точка од пасивна мрежа</li> <li><input checked="" type="checkbox"/> Обичен вертикален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Обичен хоризонтален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Кратка цевка</li> </ul>		<p>Тип на репер</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Фундаментален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Јазолна точка</li> <li><input type="checkbox"/> Точка од пасивна мрежа</li> <li><input checked="" type="checkbox"/> Обичен вертикален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Обичен хоризонтален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Кратка цевка</li> </ul>													
<p>Забелешка: Армирано-бетонска собирна шахта за вода</p>		<p>Забелешка: Армирано-бетонска собирна шахта за вода</p>													
<p>Државен координатен систем</p> <table border="1"> <tr> <td>y</td> <td>7494602.118</td> <td>x</td> <td>4586822.867</td> <td>H</td> <td>687.8076</td> </tr> </table>		y	7494602.118	x	4586822.867	H	687.8076	<p>Државен координатен систем</p> <table border="1"> <tr> <td>y</td> <td>7493791.678</td> <td>x</td> <td>4588429.673</td> <td>H</td> <td>673.5004</td> </tr> </table>		y	7493791.678	x	4588429.673	H	673.5004
y	7494602.118	x	4586822.867	H	687.8076										
y	7493791.678	x	4588429.673	H	673.5004										
<p>Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000</p> 		<p>Полигон: L25   Репер: L25-21 Скица</p> 		<p>Нивелманска мрежа на Македонија Ортофото 1:5000</p> 		<p>Полигон: L25   Репер: L25-22 Скица</p> 									
<p>Фотографија 1</p> 		<p>Фотографија 2</p> 		<p>Фотографија 1</p> 		<p>Фотографија 2</p> 									
<p>ETRS89   В   41° 27' 17.90580"   Л   20° 55' 16.34898"   h   704.1969</p>		<p>ETRS89   В   41° 27' 56.83190"   Л   20° 54' 51.82339"   h   690.9577</p>													
<p>Тип на репер</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Фундаментален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Јазолна точка</li> <li><input type="checkbox"/> Точка од пасивна мрежа</li> <li><input checked="" type="checkbox"/> Обичен вертикален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Обичен хоризонтален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Кратка цевка</li> </ul>		<p>Тип на репер</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Фундаментален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Јазолна точка</li> <li><input type="checkbox"/> Точка од пасивна мрежа</li> <li><input checked="" type="checkbox"/> Обичен вертикален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Обичен хоризонтален репер</li> <li><input type="checkbox"/> Кратка цевка</li> </ul>													
<p>Забелешка: Армирано-бетонска собирна шахта за вода</p>		<p>Забелешка: Армирано-бетонски пропуст</p>													
<p>Државен координатен систем</p> <table border="1"> <tr> <td>y</td> <td>7493859.494</td> <td>x</td> <td>4590136.367</td> <td>H</td> <td>660.8403</td> </tr> </table>		y	7493859.494	x	4590136.367	H	660.8403	<p>Државен координатен систем</p> <table border="1"> <tr> <td>y</td> <td>7493291.444</td> <td>x</td> <td>4591337.658</td> <td>H</td> <td>647.5890</td> </tr> </table>		y	7493291.444	x	4591337.658	H	647.5890
y	7493859.494	x	4590136.367	H	660.8403										
y	7493291.444	x	4591337.658	H	647.5890										